RECHERCHE OPERATIONNELLE : ALGORITHME DU SIMPLEXE ET SES APPLICATIONS

Hédi Nabli

Triangle de Pascal
(As-Samaw'al (1130 - 1180))

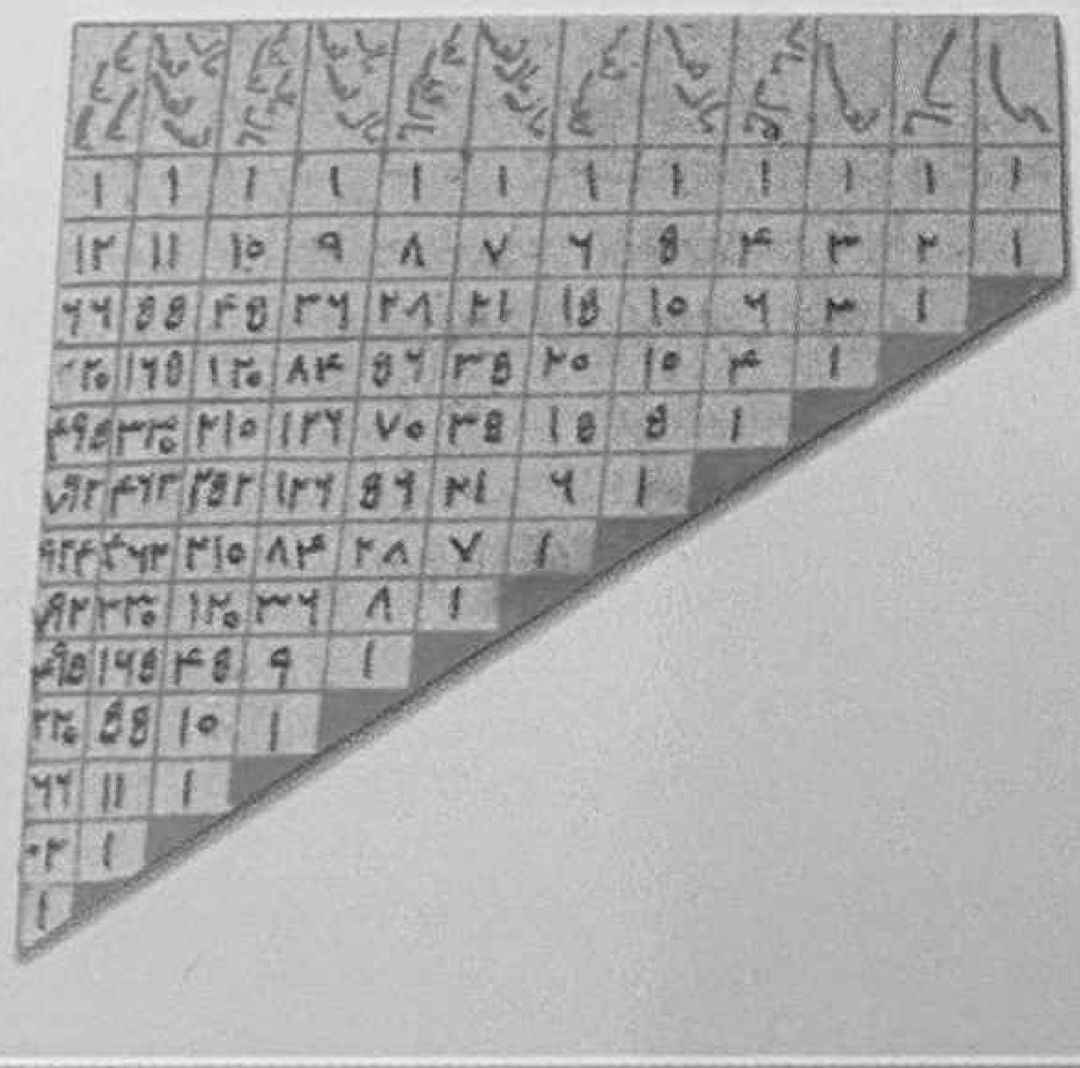
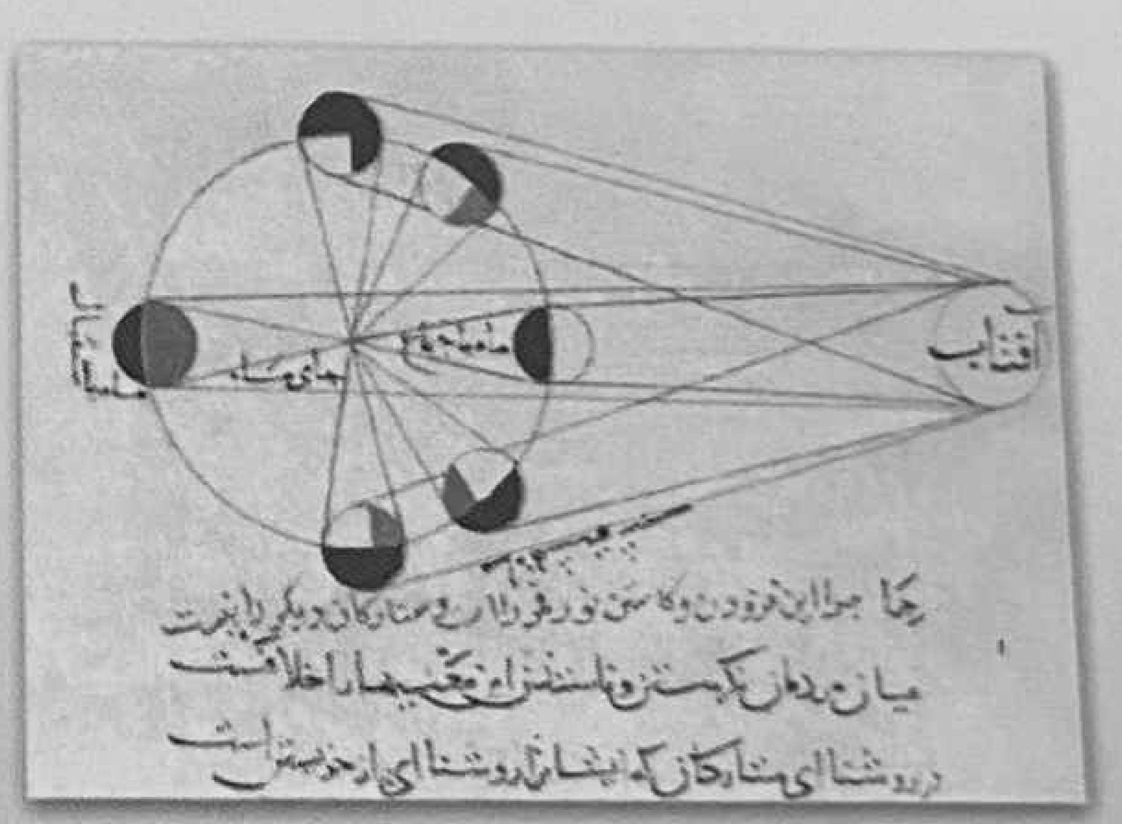


Illustration d'une éclipse de lune
(Al-Biruni (973 - 1048))



Centre de Publication Universitaire

Recherche Opérationnelle : Algorithme du Simplexe et ses Applications

Recherche Opérationnelle : Algorithme du Simplexe et ses Applications

Hédi Nabli

Maître de Conférences en Mathématiques Appliquées
Institut Supérieur d'Informatique et de Mathématiques
Monastir – Tunisie

Centre de Publication Universitaire
2006

C'est par l'art du calcul qu'il faut commencer l'école, car il donne des connaissances claires et des démonstrations systématiques. En général, il forme des têtes bien faites, habituées à raisonner juste. On prétend même qu'on doit faire confiance à celui qui a étudié le calcul dès son enfance, car il a acquis des bases solides, pour la contestation, qui lui deviennent comme une seconde nature ; de sorte qu'il s'habitue à l'exactitude et s'en tient à la méthode (que lui a apprise le calcul) ...

Sachez que la géométrie ouvre l'esprit et lui donne (le goût) de la rigueur. Toutes les démonstrations y sont claires et bien ordonnées. L'erreur ne peut guère y avoir accès, en raison de cette clarté et de cet ordre. Aussi, celui qui a constamment recours à la géométrie a-t-il peu de chance de se tromper. De la sorte, la géométrie développe son intelligence. On prétend que Platon avait inscrit sur sa porte : "Que nul n'entre ici, s'il n'est géomètre". Nos maîtres comparaient l'effet de la géométrie sur l'intelligence à l'action du savon sur les vêtements : elle enlève les souillures et en nettoie les taches.

Al-Muqaddima

Abd er-Rahman Ibn Khaldoun (1332 – 1406)

Traduction par Vincent Monteil

Table des matières

1 Programmation linéaire **1**

1.1 Généralités 1

1.2 Méthode graphique 4

1.3 Méthode des sommets 7

1.3.1 Espace affine 7

1.3.2 Convexité 9

1.3.3 Enumération des sommets 11

1.4 Exercices 13

2 Méthode du simplexe **19**

2.1 Forme canonique et standard 19

2.2 Notion de base réalisable 22

2.3 Algorithme du simplexe 28

2.3.1 Conditions d'optimalité 28

2.3.2 Amélioration de la fonction d'objectif . . . 31

2.3.3 Tableau simplexe 35

2.4 Formules itératives 43

2.4.1 Matrice du pivot 43

2.4.2 Vecteur des coûts réduits 46

2.5 Application à un problème de portefeuille 50

2.6 Exercices 54

3 Recherche d'une base réalisable initiale **61**

3.1 Méthode des deux phases 61

3.2 Méthode du grand M 66

3.3 Méthode de la base non réalisable 68

3.3.1 Cas simple 68

3.3.2 Cas complexe 71

3.3.3 Cas singuliers 73

3.4 Application à un problème de mélange 78

3.5 Exercices 81

4 Cas particuliers **85**
4.1 Dégénérescence - Cyclage . . . 85
4.1.1 Optimalité sous dégénérescence . . . 85
4.1.2 Règle de pivotage . . . 87
4.1.3 Cyclage . . . 88
4.2 Un cas extrême . . . 91
4.3 Programmes linéaires à variables bornées . . . 93
4.4 Méthode du simplexe révisée . . . 104
4.5 Exercices . . . 112

5 Programmes linéaires paramétriques **115**
5.1 Paramétrisation de la fonction économique . . . 115
5.2 Paramétrisation du second membre des contraintes . . . 120
5.3 Paramétrisation du premier membre des contraintes . . . 124
5.3.1 Paramétrisation d'un vecteur hors base . . . 124
5.3.2 Paramétrisation d'un vecteur de base . . . 127
5.4 Exercices . . . 132

6 Dualité en programmation linéaire **137**
6.1 Primal - Dual . . . 137
6.2 Conditions d'optimalité . . . 142
6.2.1 Optimalité pour le primal-dual . . . 142
6.2.2 Ecarts complémentaires . . . 149
6.2.3 Optimum infini . . . 152
6.3 Tableaux formels . . . 153
6.4 Algorithme dual - simplexe . . . 164
6.5 Exercices . . . 169

7 Problème de transport **179**
7.1 Tableau de transport . . . 179
7.2 Initialisation . . . 182
7.2.1 Règle du coin Nord-Ouest . . . 185
7.2.2 Méthode de plus faible coût . . . 188
7.2.3 Méthode des pénalités . . . 189
7.2.4 Méthode de Russel . . . 193
7.3 Calcul des coûts réduits . . . 196
7.3.1 Méthode des cycles de changement . . . 196
7.3.2 Méthode des potentiels . . . 203
7.4 Amélioration du coût de transport . . . 207
7.4.1 Mise en œuvre du simplexe . . . 207
7.4.2 Méthode récursive . . . 210
7.5 Problème d'affectation . . . 214
7.6 Exercices . . . 217

Bibliographie **221**

Chapitre 1

Programmation linéaire

Ce chapitre est consacré à définir et introduire la programmation linéaire, une discipline reconnue pour ses diverses applications. Dans ce contexte, le terme programmation désigne l'organisation des calculs et non la réalisation d'un programme informatique. Pour aplanir l'algorithme le plus connu en programmation linéaire, à savoir l'algorithme du simplexe, deux méthodes de résolutions seront étudiées et analysées. Des exemples d'application seront proposés au fur et à mesure en vue d'une meilleure illustration.

1.1 Généralités

Un **programme linéaire** est un problème dans lequel on est amené à maximiser (ou minimiser) une application linéaire, appelée **fonction d'objectif** ou **fonction économique**, sur un ensemble d'équations et/ou d'inéquations linéaires, dites **contraintes**. Autrement dit, la programmation linéaire est une branche des mathématiques qui a pour but de résoudre des problèmes d'optimisation linéaire de type

$$\begin{cases} \max(\text{ou } \min)[Z(x_1,\ldots,x_p) = \sum_{j=1}^{p} c_j x_j] \\ \sum_{j=1}^{p} a_{ij}x_j \leq (\text{et/ou } =)\ b_i, \text{ pour } i = 1,\ldots,m. \end{cases}$$

Les coefficients c_j, a_{ij} et b_i sont des réels fixés et les x_j sont des variables réelles. Les contraintes d'inégalités éventuelles sont toutes larges et non strictes. Il se peut qu'une contrainte d'inégalité soit de type " $\geq$ ". En

multipliant chaque inégalité de type " $\geq$ " par (-1), on peut supposer que toutes les contraintes d'inégalité sont de type " $\leq$ ".

Du point de vue des applications, la programmation linéaire est d'une grande portée. Elle s'applique à des problèmes très variés qui sont issus de l'économie, de l'ingénierie, de la physique ou encore des modèles probabilistes. Dans ce cadre, on peut citer par exemple, les problèmes de type gestion de stock, gestion de production, gestion financière, transport de marchandise, affectation du personnel, systèmes industriels, réseaux de communication, *etc.* Pour les modèles de programmation linéaire, on est souvent amené à maximiser un gain ou minimiser un coût. Ceci explique d'ailleurs pourquoi la fonction à maximiser s'appelle fonction d'objectif ou fonction économique.

Exemple 1 Une usine fabrique deux produits (A) et (B) à l'aide des matières premières I, II et III. Le fonctionnement de l'usine est comme suit :

1 unité du produit (A) nécessite 2 unités de I et 1 unité de II.

1 unité du produit (B) nécessite 1 unité de I, 2 unités de II et 1 unité de III.

On suppose que l'usine dispose des matières premières I, II et III en quantités respectives 8, 7 et 3. Le profit dû à la fabrication d'une unité du produit (A) (resp. (B)) est égal à 4 (resp. 5) Dinars Tunisiens (DT). L'objectif étant maximiser le profit tout en respectant les contraintes sur la matière première.

Si on désigne respectivement par x_1 et x_2 les quantités vendues du produit (A) et (B), le gain total vaut $Z(x_1, x_2) = 4x_1 + 5x_5$. D'autre part, la disponibilité en matières premières revient à exiger des quantités, utilisées pour la fabrication de x_1 et x_2, qui soient inférieures aux quantités disponibles. Ces contraintes s'expriment par les inégalités suivantes :

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 8 \\ x_1 + 2x_2 \leq 7 \\ \qquad\; x_2 \leq 3 \end{cases}$$

Bien entendu, les variables x_1 et x_2 doivent être positives. En conclusion, le problème de maximisation du profit se traduit mathématiquement par

un programme linéaire qui s'écrit sous la forme :

$$\begin{cases} \max[Z(x_1, x_2) = 4x_1 + 5x_2] \\ 2x_1 + x_2 \leq 8 \\ x_1 + 2x_2 \leq 7 \\ x_2 \leq 3 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Pour un problème d'optimisation linéaire, tout élément qui vérifie l'ensemble des contraintes s'appelle **point réalisable** ou **admissible**. L'ensemble de tous les points réalisables s'appelle **domaine réalisable**. Il est facile de vérifier que le domaine réalisable d'un programme linéaire est **convexe**. On rappelle qu'un ensemble est dit convexe si à chaque fois qu'il contient deux points x et y, il contient le segment joignant x et y (voir Figure 1.1 et Figure 1.2). Ce segment est souvent noté par $[x, y]$ et il est défini par

$$[x, y] = \{\lambda x + (1 - \lambda)y \ / \ \lambda \in [0, 1]\}.$$

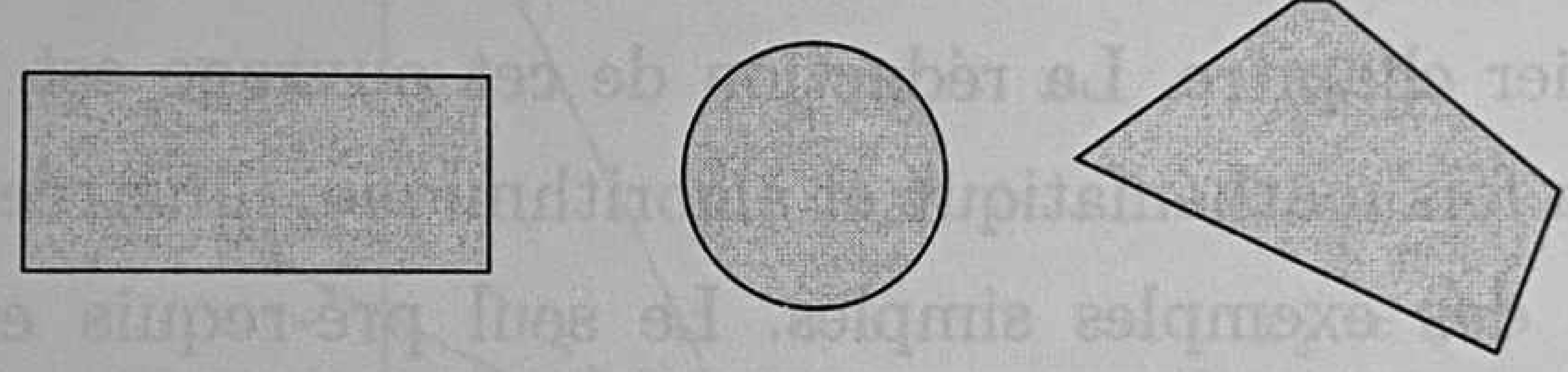


FIG. 1.1 – Exemples de domaines convexes

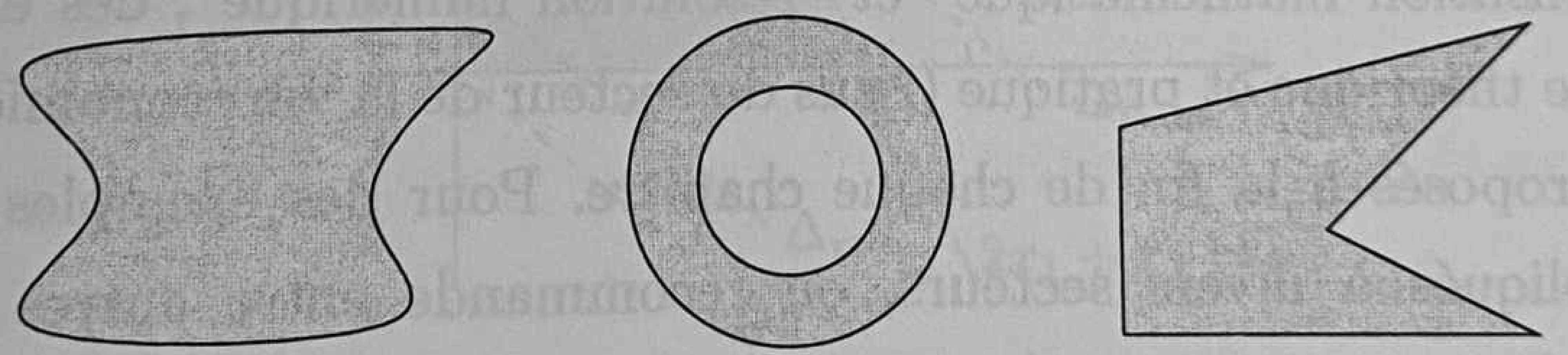


FIG. 1.2 – Exemples de domaines non convexes

Un point est dit **optimal** s'il est admissible et s'il réalise l'optimum de la fonction d'objectif sur le domaine réalisable. Par exemple, pour le problème

$$\begin{cases} \max[Z(x_1, x_2) = x_1 - x_2] \\ x_1 + x_2 \leq 1 \\ x_2 \geq 0, \end{cases}$$

tout point réalisable (x_1, x_2) vérifie

$$Z(x_1, x_2) = x_1 - x_2 \leq x_1 \leq x_1 + x_2 \leq 1.$$

D'autre part, le point $(1,0)$ est réalisable et on a $Z(1,0) = 1$. Donc, la solution réalisable $(1,0)$ est optimale et la valeur maximale de Z sur le domaine réalisable est $Z(1,0) = 1$.

Dans cet ouvrage, nous allons présenter des techniques qui permettent de résoudre les programmes linéaires que l'on convient désormais de noter (PL). Diverses méthodes ont été proposées dans la littérature. Dans ce chapitre, on s'intéresse tout d'abord à la méthode graphique. Toutefois, l'utilisation de cette méthode est restreinte aux (PL) ayant un nombre de variables au plus égal à 3. Ensuite, une méthode algébrique basée sur la résolution des systèmes linéaires sera étudiée et analysée. Cette méthode peut s'avèrer très coûteuse en temps de calcul pour des problèmes pratiques. Ce n'est qu'avec l'introduction par George Dantzig [5], en 1951, de la méthode du simplexe, que des algorithmes itératifs ont pu être mis au point. Cette technique sera développée en détail dans les Chapitres 2, 3 et 4. Une version qui découle de l'algorithme du simplexe et qui s'applique à des problèmes plus spécifiques sera donnée dans le dernier chapitre. La rédaction de cet ouvrage est axée sur une approche à la fois mathématique et algorithmique, illustrée dans chaque chapitre par des exemples simples. Le seul pré-requis exigé pour la compréhension des résultats mathématiques se limite aux notions de base d'Algèbre matricielle. Afin d'initier le lecteur aux deux aspects “modélisation mathématique” et “résolution numérique”, des exercices de type théorique et pratique (issus du secteur de la vie économique) seront proposés à la fin de chaque chapitre. Pour des exemples résolus et appliqués à divers secteurs, on recommande entre autres les ouvrages [4, 8, 11, 14, 16, 23].

1.2 Méthode graphique

Nous allons présenter cette méthode à travers trois exemples représentatifs, ayant chacun deux variables structurelles. Le premier admet une et une seule solution optimale. Quant au deuxième, il admet une infinité de solutions optimales. Par contre, le troisième exemple n'admet aucune solution optimale.

La résolution d'un (PL) par la méthode graphique se fait selon une

démarche commune, celle-ci peut être résumée en quatre directives :

1. Schématiser le domaine réalisable dans un repère orthonormé.
2. Sur le même repère, représenter l'hyperplan $\Delta_0 \ : Z(x) = 0$. Noter que chaque hyperplan Δ_r d'équation $Z(x) = r$, $r \in \mathbb{R}$, est parallèle à Δ_0, tout simplement parce que ces hyperplans ont le même vecteur (ou plan) directeur.
3. Si le (PL) considéré est de type maximisation (*resp.* minimisation), indiquer, par une flèche, le sens de déplacement parallèle de Δ_r qui fait augmenter (*resp.* diminuer) r.
4. Déterminer l'hyperplan $\Delta_{r_{\max}}$ la plus éloignée (dans le sens de la flèche) de Δ_0 et qui coupe le domaine réalisable $\mathcal{R}$. Tout point de $\Delta_{r_{\max}} \cap \mathcal{R}$ est une solution optimale. Si un tel hyperplan $\Delta_{r_{\max}}$ n'existe pas, cela veut dire que l'optimum est infini.

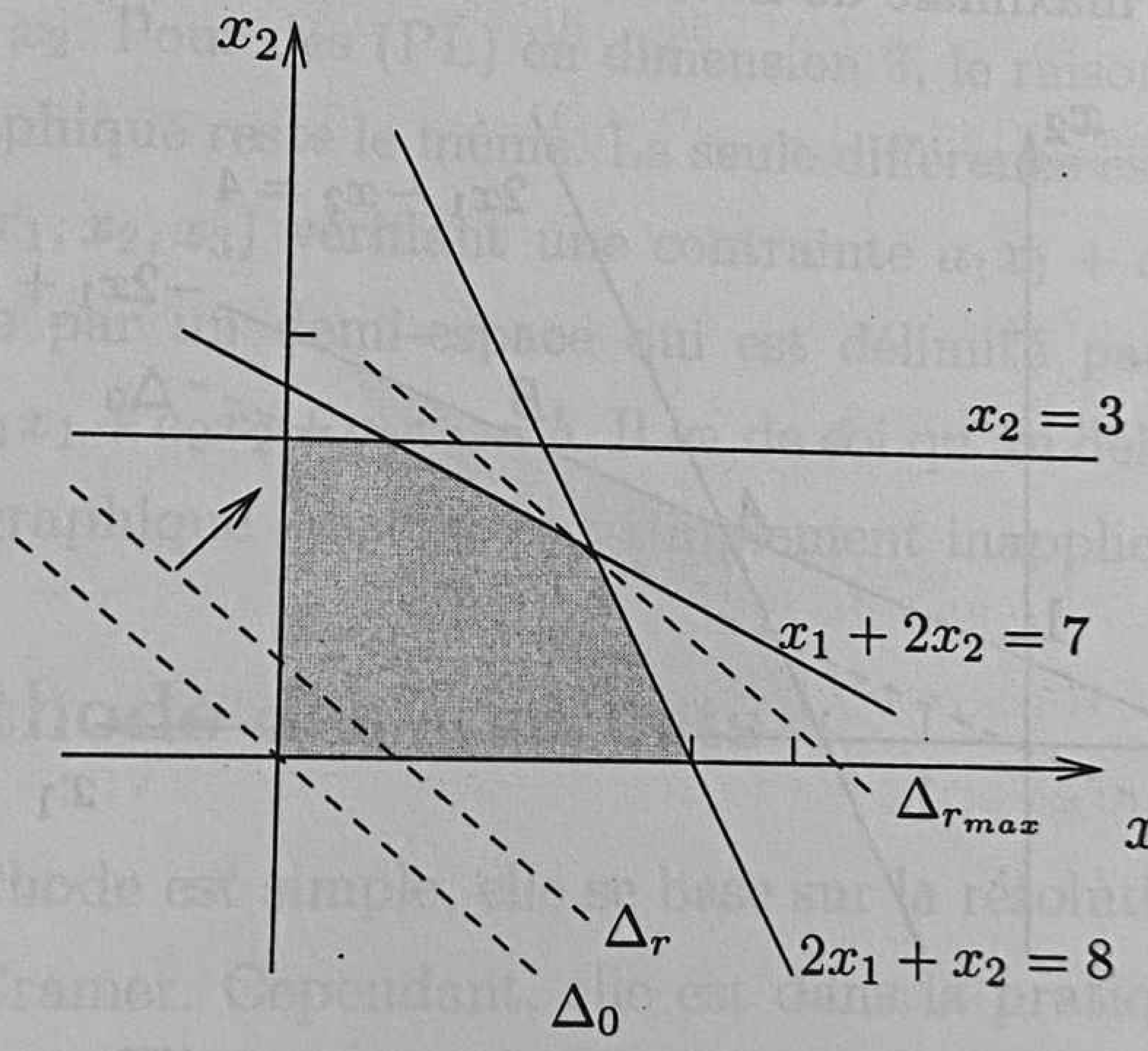


FIG. 1.3 – Représentation graphique pour l'Exemple 1.

Traitons tout d'abord l'Exemple 1 défini dans le paragraphe précédent. Le domaine réalisable est schématisé en gris dans la Figure 1.3. Toute droite Δ_r d'équation $Z(x_1, x_2) = r$, où r est un réel fixé, est parallèle à la droite $\Delta_0 : Z(x_1, x_2) = 0$. On constate aussi que tout déplacement parallèle de Δ_r dans le sens de la flèche (voir Figure 1.3) fait augmenter r. Donc maximiser la fonction Z, tout en satisfaisant aux contraintes du problème, revient à chercher la droite Δ_r la plus éloignée (dans le sens de la flèche) de Δ_0 et qui coupe le domaine réalisable. Explicitement,

il s'agit de la droite $\Delta_{r_{\max}}$ passant par le point $(3,2)$ et parallèle à Δ_0. Ainsi, on peut conclure que le point $(3,2)$ est la seule solution optimale qui donne une valeur maximale de la fonction d'objectif égale à $Z(3,2) = 22$. Autrement dit, le meilleur profit vaut 22DT, il est obtenu en fabricant 3 unités du produit (A) et 2 unités du produit (B).

Exemple 2 Résoudre le (PL) suivant par la méthode graphique.

$$\begin{cases} \max[Z(x_1,x_2) = -6x_1 + 15x_2] \\ 2x_1 - x_2 \geq 4 \\ -2x_1 + 5x_2 \leq 4 \\ x_1 \geq 0, \; x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Le domaine réalisable est la partie non bornée représentée partiellement en gris dans la Figure 1.4. Le même raisonnement que précédemment permet de conclure que tout point de la demi-droite $[A, B)$ est optimal et que la valeur maximale de Z vaut $Z(A) = Z(3,2) = 12$.

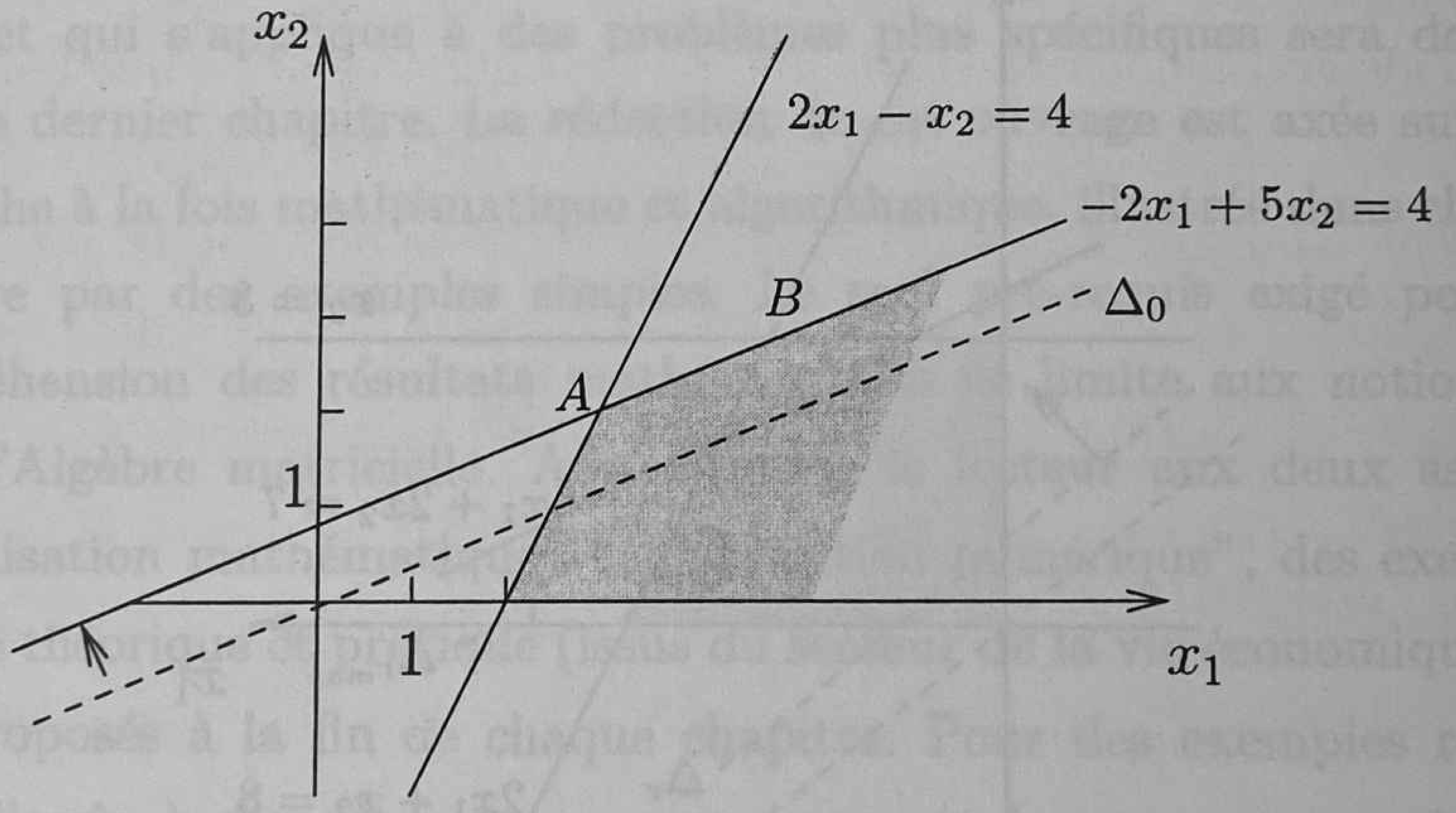


FIG. 1.4 – Représentation graphique pour l'Exemple 2.

Exemple 3 Résoudre le (PL) suivant par la méthode graphique.

$$\begin{cases} \max[Z(x_1,x_2) = x_1 + x_2] \\ -x_1 + x_2 \leq 1 \\ -x_1 + 2x_2 \leq 4 \\ x_1 \geq 0, \; x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Le domaine réalisable associé à ce (PL) est la partie non bornée représentée partiellement en gris dans la Figure 1.5. Dans le graphique, on observe que toute droite Δ_r d'équation $Z(x_1, x_2) = r$, avec $r \geq 0$,

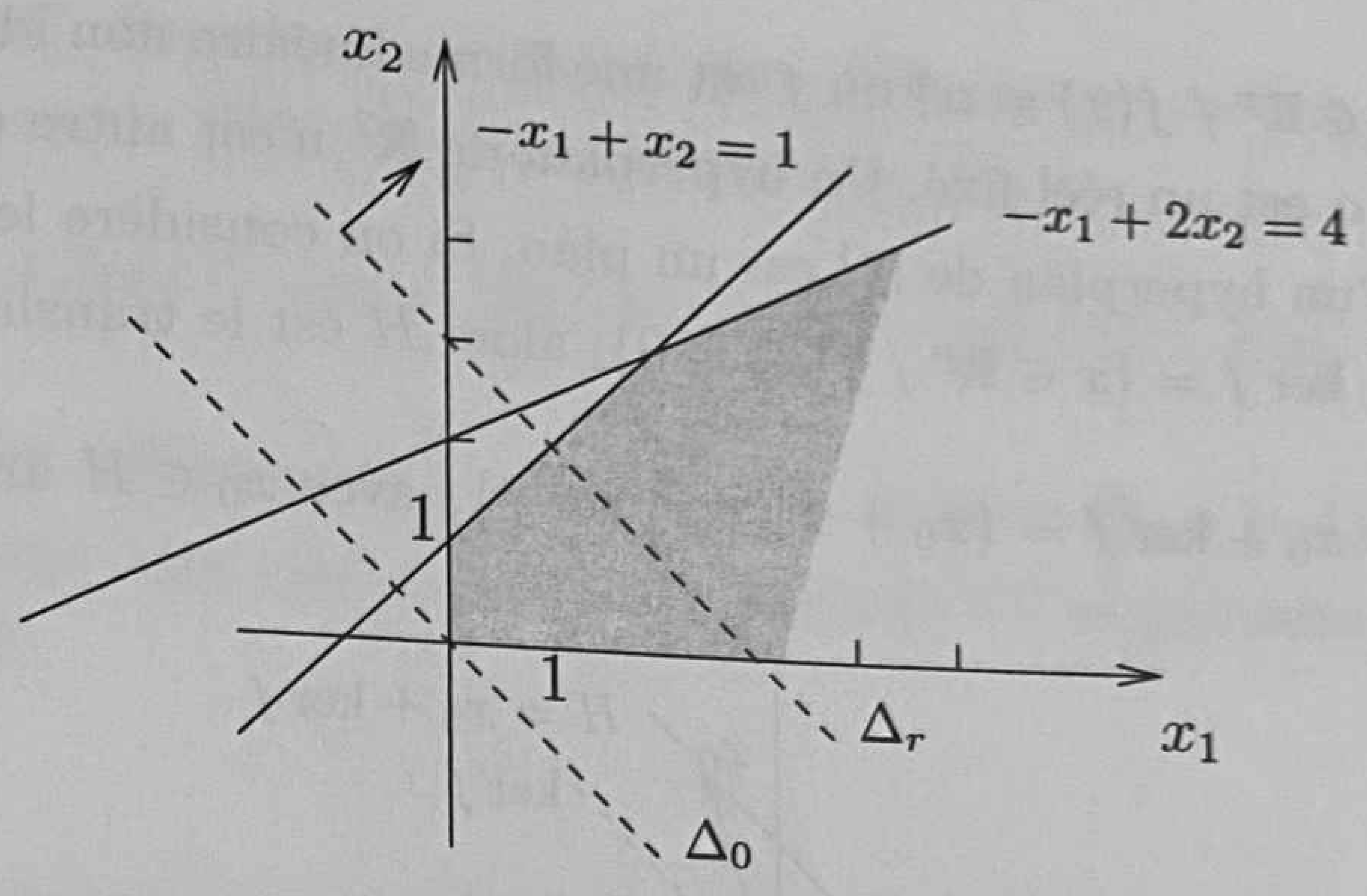


FIG. 1.5 – Représentation graphique pour l'Exemple 3.

coupe le domaine réalisable. Donc, $\sup Z = +\infty$ et par conséquent, le problème n'admet aucune solution optimale.

Tous les exemples traités dans ce paragraphe possèdent deux variables réelles x_1 et x_2. Pour des (PL) en dimension 3, le raisonnement pour la méthode graphique reste le même. La seule différence est que l'ensemble des points (x_1, x_2, x_3) vérifiant une contrainte $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 \leq b$ se représente par un demi-espace qui est délimité par le plan de $\mathbb{R}^3$ d'équation $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = b$. Il va de soi qu'au delà de 3 variables, la méthode graphique devient tout simplement inapplicable.

1.3 Méthode des sommets

Cette méthode est simple, elle se base sur la résolution des systèmes linéaires de Cramer. Cependant, elle est dans la pratique inexploitable car le nombre de systèmes à résoudre est en général trop important. Néanmoins, la méthode des sommets est d'une utilité incontestable : la recherche de l'optimum éventuel sur tout le domaine réalisable se ramène au calcul de l'optimum de la fonction d'objectif restreinte à un sous ensemble fini. Ce résultat sera l'un des outils clés de la méthode du simplexe.

1.3.1 Espace affine

A présent, nous allons rappeler quelques notions de géométrie affine. On appelle **hyperplan** de $\mathbb{R}^p$ tout ensemble H qui s'écrit sous la forme

$H = \{x \in \mathbb{R}^p \ / \ f(x) = \alpha\}$ où f est une forme linéaire non identiquement nulle et α est un réel fixé. Un hyperplan de $\mathbb{R}^2$ n'est autre qu'une droite, alors qu'un hyperplan de $\mathbb{R}^3$ est un plan. Si on considère le sous espace vectoriel $\ker f = \{x \in \mathbb{R}^p \ / \ f(x) = 0\}$, alors H est le translaté de $\ker f$:

$$H = x_0 + \ker f = \{x_0 + x \ / \ x \in \ker f\}, \text{ avec } x_0 \in H \text{ arbitraire.}$$

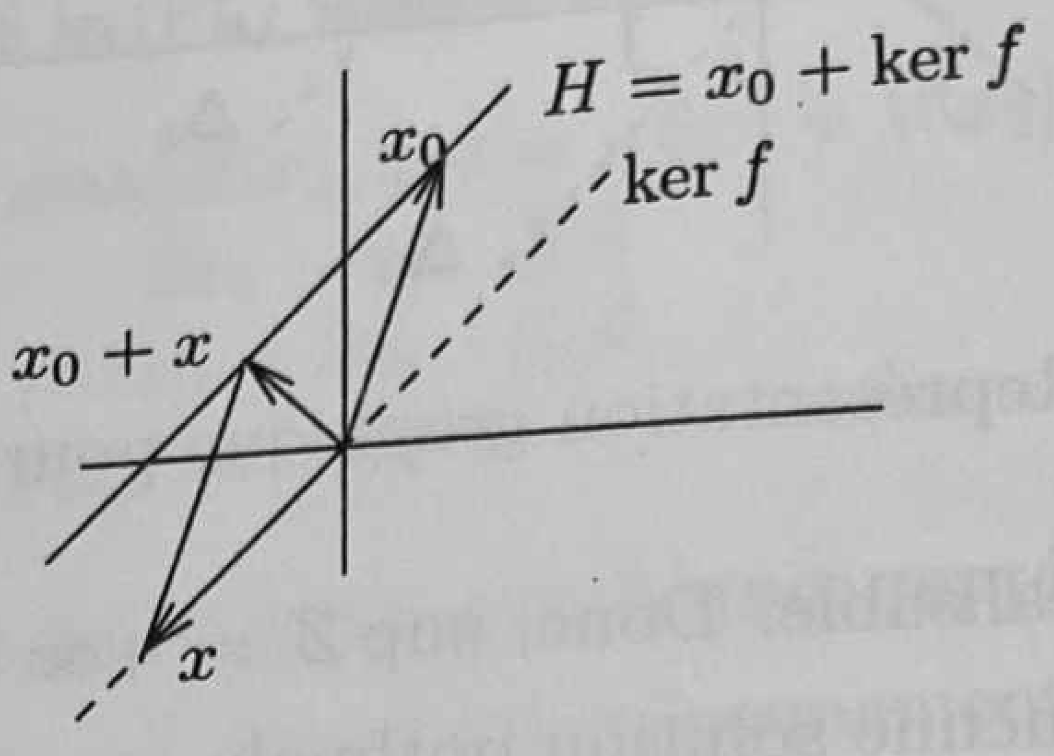


FIG. 1.6 – Un hyperplan est le translaté de son noyau associé.

On définit la dimension de H, notée $\dim H$, par la dimension du noyau associé $\ker f$. Etant donné que f est non identiquement nulle, on a nécessairement $\dim H = p-1$. Pour le demi-espace $\{x \in \mathbb{R}^p \ / \ f(x) \leq \alpha\}$ ou encore $\{x \in \mathbb{R}^p \ / \ f(x) \geq \alpha\}$, l'ensemble H d'équation $f(x) = \alpha$ s'appelle **hyperplan frontière**.

Un sous ensemble d'un espace vectoriel est dit **affine** si à chaque fois qu'il contient deux points x et y, il contient la droite (xy). Cette droite peut être décrite par

$$(xy) = \{\lambda x + (1-\lambda)y \ / \ \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

Il est facile de constater que tout hyperplan est un espace affine.

Théorème 1.3.1 *Un ensemble U d'un espace vectoriel E est affine si et seulement si il est le translaté d'un sous espace vectoriel W de E (i. e. $U = x_0 + W$).*

Démonstration. Il est clair que tout sous ensemble de la forme $x_0 + W$, avec W un sous espace vectoriel de E, est affine. Réciproquement, supposons que l'espace U est affine. Prenons un point arbitraire x_0 de U et considérons $W = -x_0 + U$. Montrons alors que W est un sous espace

vectoriel de E. Pour cela, on prend deux éléments $w_1 = -x_0 + x_1$ et $w_2 = -x_0 + x_2$ de W et λ un réel quelconque. On a

$$w_1 + \lambda w_2 = -x_0 + \lambda[2(\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2) - x_0] + (1-\lambda)x_1.$$

Comme U est affine, $y = \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 \in U$ et donc $[2y + (-1)x_0] \in U$. Ainsi, l'élément $\lambda[2y - x_0] + (1-\lambda)x_1$ appartient à U et par suite $w_1 + \lambda w_2$ reste dans W.

□

Grâce à ce théorème, on définit la dimension d'un espace affine U par la dimension du sous espace vectoriel W duquel il est le translaté. Plus généralement, si U est convexe, on définit la dimension de U par celle de l'enveloppe affine de U. L'**enveloppe affine** de U est le plus petit espace affine contenant U. Noter que l'ensemble des contraintes d'un (PL) forme un domaine convexe qui, en général, n'est pas affine. Tout de même, on peut parler de la dimension du domaine réalisable qui est la dimension de son enveloppe affine.

1.3.2 Convexité

Pour un (PL) donné, la fonction Z à optimiser est linéaire, elle est par conséquent convexe. La programmation linéaire est donc un cas particulier de problèmes plus généraux qui étudient l'optimum d'une fonction convexe sur un domaine convexe. On rappelle qu'une fonction f est dite **convexe** (*resp.*[1] **concave**) sur un ensemble convexe U, si pour tout $x, y \in U$ et pour tout réel $\lambda \in [0,1]$, on a

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \ (resp. \geq) \ \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y).$$

Tous les résultats qui vont suivre dans ce paragraphe sont valides pour tout problème d'optimisation linéaire.

Lemme 1.3.2 *Si f est convexe sur un ensemble convexe U et atteint son maximum global en un point $\bar{x} \in \overset{o}{U}$, alors f est constante sur U.*

Démonstration. Nous allons raisonner par l'absurde. Supposons que f est non constante. Puisque $\bar{x} \in \overset{o}{U}$, on peut choisir $y \in U$ tel que

[1] L'expression *resp.* désigne une abréviation du mot respectivement.

$f(y) < f(\bar{x})$ et de sorte que $z = \alpha\bar{x} + (1-\alpha)y \in U$ pour un certain réel $\alpha > 1$. Le point optimal vérifie $\bar{x} = \frac{1}{\alpha}z + (1 - \frac{1}{\alpha})y$, ce qui entraîne grâce à la convexité de f,

$$f(\bar{x}) \leq \frac{1}{\alpha}f(z) + (1-\frac{1}{\alpha})f(y) < \frac{1}{\alpha}f(\bar{x}) + +(1-\frac{1}{\alpha})f(\bar{x}) = f(\bar{x}).$$

D'où la contradiction recherchée.

□

Une autre formulation de ce lemme consiste à dire que toute fonction $f : U \to \mathbb{R}$ convexe et définie sur un domaine convexe U atteint son maximum global, lorsqu'il existe, sur la frontière $\partial U = \bar{U} \setminus \mathring{U}$. Si f est constante, on choisit simplement un point optimal $\bar{x}$ sur le bord. Pour un (PL), le domaine réalisable, qui est convexe, possède une structure particulière. Il est représenté par une intersection finie de demi-espace (les contraintes d'inégalité) et/ou d'hyperplans (les contraintes d'égalité). Ce type de domaine s'appelle polyèdre. Plus précisément, un **polyèdre** de $\mathbb{R}^p$ est une intersection finie de demi-espaces de $\mathbb{R}^p$. Même si le domaine réalisable contient une égalité $f(x) = \alpha$, celle-ci peut être remplacée par les deux demi-espaces d'inéquation respective $f(x) \leq \alpha$ et $f(x) \geq \alpha$. Un point A d'un polyèdre de $\mathbb{R}^p$ est appelé **sommet**, s'il existe p hyperplans frontières dont l'intersection est réduite à A. Pour un programme linéaire, un sommet n'est autre qu'un point réalisable qui est aussi un point d'intersection unique de p hyperplans frontières choisis parmi les contraintes, l'entier p étant le nombre de variables qui interviennent dans le (PL) étudié.

Théorème 1.3.3 *Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une application convexe sur un polyèdre U. Si f admet son maximum global en un point de U, il est aussi atteint en un sommet de U.*

Démonstration. Nous allons procéder par récurrence sur la dimension de U. Les seuls polyèdres de dimension 1 sont les intervalles fermés dont la frontière ∂U coïncide avec les sommets de U. Supposons maintenant que le résultat est vrai pour les polyèdres de dimension $p-1$ et prenons un polyèdre U de dimension p. D'après le lemme précédent, il existe une solution optimale $\bar{x}$ qui appartient au bord ∂U. Etant donné que U est un polyèdre, il existe un hyperplan frontière H de U qui

passe par $\bar{x}$. Considérons l'ensemble $H \cap U$ qui est en l'occurrence un polyèdre de dimension égale à $p-1$. D'après l'hypothèse de récurrence, f atteint sa valeur maximale sur $H \cap U$ en un sommet v de $H \cap U$. La démonstration de ce théorème est alors achevée, parce que d'une part, on a :

$$\max_{x \in H \cap U} f(x) = \max_{x \in U} f(x), \text{ puisque } \bar{x} \in H \cap U \text{ et } f(\bar{x}) = \max_{x \in U} f(x).$$

D'autre part, de la définition d'un sommet, on sait qu'il existe $(p-1)$ hyperplans frontières de $H \cap U$ dont l'intersection est réduite à v. Ajoutons à ceux-ci l'hyperplan frontière H, on obtient p hyperplans frontière de U dont l'intersection est réduite à v. Ainsi v est un sommet de U.

□

Ici, juste le résultat qui nous intéresse a été présenté, il concerne la nature de la solution optimale d'une fonction convexe. En revanche, la littérature mathématique est riche dans le domaine de l'analyse convexe. Pour plus de détails, consulter par exemple [26, 29].

1.3.3 Enumération des sommets

Il est bien connu que le maximum d'une fonction f est l'opposé du minimum de $(-f)$. Aussi, l'opposé d'une fonction convexe est concave. Ces deux dernières constatations permettent de conclure que le Théorème 1.3.3 peut être formulé au terme de minimum d'une fonction concave. Plus précisément, une fonction concave qui admet son minimum global en un point d'un polyèdre U, atteint ce minimum en un sommet de U. Maintenant, pour un (PL) donné, la fonction d'objectif Z, qui est linéaire, est à la fois convexe et concave. Par conséquent, l'optimum (que ce soit maximum ou minimum) d'un (PL), lorsqu'il existe, peut toujours être réalisé sur un sommet. Cette brève analyse nous permet d'énoncer le résultat ci-après.

Corollaire 1.3.4 *Si un programme linéaire à variables réelles admet une solution, il existe toujours une solution optimale qui est un sommet du domaine réalisable.* □

La méthode des sommets pour la résolution d'un (PL), consiste à :

1. déterminer tous les sommets du domaine réalisable,
2. calculer ensuite la valeur de Z en chacun de ces sommets.
3. Enfin, le sommet doté de la meilleure valeur de Z serait une solution optimale.

Une chose reste à vérifier pour l'application de cette méthode : s'assurer tout d'abord que le (PL) considéré admet bien une solution (*i. e.* l'optimum est fini). Cette condition est souvent difficile à vérifier. Néanmoins, lorsque le domaine réalisable est borné, et par suite compact, l'existence d'une solution optimale est certaine.

Exemple 4 Appliquer la méthode des sommets pour résoudre les trois premiers exemples.

Pour l'Exemple 1, les sommets du domaine réalisable sont les points (voir Figure 1.3)

$$(0,0)\ ;\ (4,0)\ ;\ (1,3)\ ;\ (3,2)\ \text{et}\ (0,3).$$

La valeur de la fonction d'objectif Z en chacun de ces sommets est

$$Z(0,0)=0\ ;\ Z(4,0)=16\ ;\ Z(1,3)=19\ ;\ Z(3,2)=22\ \text{et}\ Z(0,3)=15.$$

Il est clair que la plus grande valeur de Z en ces sommets est atteinte au point $(3,2)$ et elle vaut $Z(3,2)=22$. Pour l'Exemple 2, d'après le graphique, les seuls sommets sont $(2,0)$ et $(3,2)$. De plus, on a $Z(2,0)=-12<Z(3,2)=12$, ce qui entraîne que $(3,2)$ est une solution optimale. Concernant l'Exemple 3, les sommets du domaine réalisable sont les points $(0,0)$, $(0,1)$ et $(2,3)$. La valeur de Z en chacun de ces points vaut

$$Z(0,0)=0,\ Z(0,1)=1\ \text{et}\ Z(2,3)=5.$$

Cependant, on ne peut affirmer que $(2,3)$ est une solution optimale, puisqu'on a déjà vu que la borne supérieure de ce problème est infinie.

La méthode des sommets peut s'appliquer même pour des (PL) ayant un nombre de variables strictement supérieur à 3. Afin de déterminer un sommet, on choisit p hyperplans (p étant le nombre de variables) parmi les n contraintes du domaine réalisable (y compris les contraintes

1. déterminer tous les sommets du domaine réalisable,
2. calculer ensuite la valeur de Z en chacun de ces sommets.
3. Enfin, le sommet doté de la meilleure valeur de Z serait une solution optimale.

Une chose reste à vérifier pour l'application de cette méthode : s'assurer tout d'abord que le (PL) considéré admet bien une solution (*i. e.* l'optimum est fini). Cette condition est souvent difficile à vérifier. Néanmoins, lorsque le domaine réalisable est borné, et par suite compact, l'existence d'une solution optimale est certaine.

Exemple 4 Appliquer la méthode des sommets pour résoudre les trois premiers exemples.

Pour l'Exemple 1, les sommets du domaine réalisable sont les points (voir Figure 1.3)

$$(0,0)\ ;\ (4,0)\ ;\ (1,3)\ ;\ (3,2) \text{ et } (0,3).$$

La valeur de la fonction d'objectif Z en chacun de ces sommets est

$$Z(0,0) = 0\ ;\ Z(4,0) = 16\ ;\ Z(1,3) = 19\ ;\ Z(3,2) = 22 \text{ et } Z(0,3) = 15.$$

Il est clair que la plus grande valeur de Z en ces sommets est atteinte au point $(3,2)$ et elle vaut $Z(3,2) = 22$. Pour l'Exemple 2, d'après le graphique, les seuls sommets sont $(2,0)$ et $(3,2)$. De plus, on a $Z(2,0) = -12 < Z(3,2) = 12$, ce qui entraîne que $(3,2)$ est une solution optimale. Concernant l'Exemple 3, les sommets du domaine réalisable sont les points $(0,0)$, $(0,1)$ et $(2,3)$. La valeur de Z en chacun de ces points vaut

$$Z(0,0) = 0,\ Z(0,1) = 1 \text{ et } Z(2,3) = 5.$$

Cependant, on ne peut affirmer que $(2,3)$ est une solution optimale, puisqu'on a déjà vu que la borne supérieure de ce problème est infinie.

La méthode des sommets peut s'appliquer même pour des (PL) ayant un nombre de variables strictement supérieur à 3. Afin de déterminer un sommet, on choisit p hyperplans (p étant le nombre de variables) parmi les n contraintes du domaine réalisable (y compris les contraintes

de positivité : $x_i \geq 0$). On obtient ainsi un système linéaire d'ordre p que l'on résout. Si ce système admet une et une seule solution A, on vérifie si A satisfait les $(n-p)$ contraintes restantes. Dans ce cas, A est un sommet, sinon le choix considéré de ces p équations linéaires ne permet pas d'avoir un sommet et pour ce faire, on effectue un autre choix de p hyperplans frontières parmi les n contraintes. Dans le but d'obtenir tous les sommets, il va falloir balayer tous les choix possibles dont le nombre est égal à

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}.$$

Chaque choix qui aboutit à un système de Cramer dont la solution est réalisable permet d'obtenir un sommet. Enfin, la solution du problème considéré est obtenue en prenant l'optimum de la fonction d'objectif sur tous les sommets.

Dans la pratique, cette méthode est en fait très coûteuse en temps de calcul. D'une part, la détermination d'un sommet exige la résolution d'un système linéaire de Cramer d'ordre p dont la solution doit satisfaire les contraintes restantes. D'autre part, le nombre $\binom{n}{p}$ est en général très important. A titre indicatif, on a $\binom{25}{10} = 3.268.760$! Par ailleurs, compte tenu de l'Exemple 3, cette méthode n'est applicable que lorsqu'on est certain que le (PL) admet une solution optimale, ce qui est à priori difficile à vérifier.

1.4 Exercices

Exercice 1.4.1

Résoudre les deux problèmes suivants par la méthode graphique.

$$\begin{cases} \max[Z(x) = 12x_1 + 9x_2] \\ 3x_1 + x_2 \quad \leq 60 \\ 3x_1 + 2x_2 \quad \leq 66 \\ x_1 + x_2 \quad \leq 30 \\ x = (x_1, x_2) \geq 0_{\mathbb{R}^2}. \end{cases} \qquad \begin{cases} \max[Z(x) = -2x_1 - x_2] \\ 3x_1 + x_2 \quad = 3 \\ 4x_1 + 3x_2 \quad \geq 6 \\ x_1 + 2x_2 \quad \leq 3 \\ x = (x_1, x_2) \geq 0_{\mathbb{R}^2}. \end{cases}$$

Exercice 1.4.2

1) *Montrer qu'un (PL), de domaine réalisable borné, admet toujours une solution optimale.*

2) *On considère maintenant le (PL) suivant :*

$$\begin{cases} \max[Z(x) = 35x_1 + 45x_2 + 48x_3] \\ 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 \leq 480 \\ 2x_1 + x_3 \leq 240 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 \leq 240 \\ x = (x_1, x_2, x_3) \geq 0_{\mathbb{R}^3}. \end{cases}$$

a - *Sans graphique, montrer que le domaine réalisable est borné.*

b - *Sans aucune représentation graphique, déterminer tous les sommets.*

c - *En déduire la solution de ce (PL).*

Exercice 1.4.3

On considère le (PL) suivant :

$$\begin{cases} \max[Z(x) = x_1 + x_2] \\ 2x_1 - x_2 \leq 1 \\ x_1 - x_2 \leq 3 \\ x = (x_1, x_2) \geq 0_{\mathbb{R}^2}. \end{cases}$$

1) *Résoudre ce (PL) par la méthode graphique.*

2) *Proposer une famille* $(x_\lambda)_{\lambda \geq 0}$ *de solutions réalisables telle que*

$$\lim_{\lambda \to +\infty} Z(x_\lambda) = +\infty.$$

3) *Ajouter une contrainte de sorte que le problème, ainsi obtenu, admette une infinité de solutions optimales et que la valeur optimale soit égale à 1. Cette contrainte supplémentaire est-elle unique ?*

Exercice 1.4.4

On considère le (PL) à trois variables réelles :

$$\begin{cases} \max[Z(x) = -x_1 + 3x_2 - 2x_3] \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 3 \\ -x_1 + x_2 \geq 0 \\ x_3 \leq 2 \\ x = (x_1, x_2, x_3) \geq 0_{\mathbb{R}^3}. \end{cases}$$

1) *Représenter le domaine réalisable dans un repère orthonormé.*

2) *Résoudre ce (PL) par la méthode des sommets.*

Exercice 1.4.5

On considère le (PL) suivant :

$$\begin{cases} \max[Z(x) = 6x_1 + 5x_2] \\ x_1 + x_2 \leq 8 \\ -2x_1 + 3x_2 \leq 6 \\ x_1 - x_2 \leq 2 \\ x = (x_1, x_2) \geq 0_{\mathbb{R}^2}. \end{cases}$$

1) *Donner une solution graphique de ce (PL).*

2) *En introduisant un paramètre θ dans la fonction économique Z, le (PL) s'écrit :*

$$\begin{cases} \max[Z(x) = (6 - 2\theta)x_1 + (5 + \theta)x_2] \\ x_1 + x_2 \leq 8 \\ -2x_1 + 3x_2 \leq 6 \\ x_1 - x_2 \leq 2 \\ x = (x_1, x_2) \geq 0_{\mathbb{R}^2}. \end{cases}$$

a - *Résoudre ce (PL) suivant les valeurs de θ.*

b - *Parmi les solutions réalisables trouvées dans la première question, quelles sont celles qui ne sont jamais solutions optimales ?*

c - *Pour quelles valeurs de θ, ce (PL) admet une infinité de solutions optimales ?*

Exercice 1.4.6

Un commerçant vend des chaussettes sur le marché. Sa clientèle lui achète des chaussettes de deux types :

- *des mi-bas en fil de coton*
- *des chaussettes en laine.*

Le goût des clients l'amène à proposer deux types de lots :

- *un lot à 18DT comprenant 2 paires de chaussettes en coton et 4 paires en laine*
- *un lot à 24DT comprenant 2 paires de chaussettes en coton et 8 paires en laine.*

Il dispose en total de 28 paires de chaussettes en coton et de 100 paires en laine. Quels lots doit-il présenter pour réaliser une recette maximale ?

Exercice 1.4.7

Un menuisier fournit chaque semaine à une entreprise de distribution des tabourets de deux types M_1 et M_2, qu'il vend par lots. Les bénéfices liés à la vente d'un lot de chaque type sont respectivement de 700DT et de 300DT. La fabrication de ces tabourets nécessite l'usage de quatre outils : foreuse (F), scie (S), tour (T) et poreuse (P). Les capacités hebdomadaires d'utilisation de chacun d'eux sont respectivement égales à 120, 150, 120 et 150 heures. Par ailleurs, chaque lot M_1 et M_2 nécessite une utilisation différente des outils, représentée en heure de travail dans le tableau suivant :

	M_1	M_2
F	3	2
S	6	0
T	0	3
P	6	2

1) *Formuler le problème de la recherche du profit maximal au terme d'un (PL).*

2) *Par le graphique, donner la stratégie optimale de fabrication.*

3) *Suite à une fluctuation de prix, les bénéfices deviennent respectivement $700 - 2\theta$ et $300 + \theta$, où θ est un paramètre réel. Déterminer les valeurs de θ afin que la sratégie optimale de fabrication reste inchangée.*

4) *En déduire la valeur de θ qui assure un meilleur bénéfice.*

Exercice 1.4.8

Une société fabrique et vend deux types de réfrigateurs RF_1 et RF_2. Ils sont construits à partir de 3 facteurs de production : P_1 (heure machine), P_2 (heure main d'œuvre spécialisée) et P_3 (heure main d'œuvre non spécialisée). Le tableau ci-dessous résume le nombre d'unités nécessaires pour la fabrication d'un réfrigérateur RF_1 et d'un réfrigérateur RF_2 ainsi que le prix de vente unitaire V.

	P_1	P_2	P_3	V
RF_1	5	7	4	621DT
RF_2	3	8	6	732DT

Le deuxième tableau indique le coût unitaire (en DT) et la capacité hebdomadaire (en heures) pour chaque facteur.

	P_1	P_2	P_3
Coût unitaire	6	15	9
Capacité hebdomadaire	270	800	360

On suppose que tout réfrigérateur fabriqué est vendu.

1) Combien de réfrigérateurs de chaque type la société doit-elle fabriquer chaque semaine pour maximiser sa marge ?

2) La stratégie optimale de fabrication utilise-t-elle toute la capacité hebdomadaire en P_1, P_2 et P_3 ? Donner le(s) facteur(s) non entièrement exploité(s).

3) On suppose que chaque ouvrier spécialisé travaille à raison de 45 heures par semaine. Combien d'ouvriers spécialisés la société peut-elle licencier sans affecter sa stratégie optimale de fabrication ?

Exercice 1.4.9

1) Montrer que le domaine réalisable d'un (PL) est convexe.

2) Montrer que si v_1 et v_2 sont deux solutions optimales d'un (PL), alors tout point du segment $[v_1, v_2]$ est optimal.

3) Montrer que le nombre de sommets du domaine réalisable d'un (PL) est au plus égal à $\binom{p+m}{m}$, où p est le nombre de variables et m est le nombre de contraintes (sans compter les contraintes de positivité éventuelles).

4) Montrer qu'un (PL) à deux variables admet au plus deux sommets optimaux.

5) Construire un exemple pour montrer qu'un (PL) à trois variables peut admettre plus que trois sommets optimaux.

Chapitre 2

Méthode du simplexe

Dans ce chapitre, nous allons étudier une méthode qui évite de parcourir tous les sommets. Plus précisément, le passage d'un sommet à un autre se fait en améliorant la valeur de la fonction à optimiser. De plus, elle fournit un test qui permet d'affirmer le cas échéant que le problème n'admet pas de solution. Nous verrons que les résultats concernant les problèmes de type maximisation, comparés à ceux relatifs aux problèmes de minimisation, sont très similaires.

2.1 Forme canonique et standard

On convient de dire qu'un vecteur u est inférieur à un vecteur v, et on écrit $u \leq v$, si pour tout i, on a $u_i \leq v_i$. Ici, le terme u_i désigne la $i^{\text{ème}}$ composante du vecteur u. Nous mettons en garde sur le fait que la négation de $u \leq v$ n'est pas $u > v$. En effet, l'inégalité $u > v$ traduit la propriété $u_i > v_i$ pour toute composante i. Par contre, la négation de $u \leq v$, que l'on convient de noter $u \nleq v$, exprime que l'inégalité $u_i > v_i$ ait lieu pour au moins une composante i. Par ailleurs, dans le cas où toutes les contraintes d'un (PL) sont des inégalités et les variables sont astreintes à être positives, on dit que le (PL) est sous forme canonique. On a déjà expliqué qu'on peut supposer et sans perte de généralité, que les contraintes d'inégalité sont toutes de type " $\leq$ ". Par conséquent, on peut affirmer que tout (PL) sous **forme canonique** s'écrit sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \max(\text{ou } \min)[Z(x) = c^* x] \\ Ax \leq b \\ x \geq 0_{\mathbb{R}^p}, \end{cases}$$

où $c \in \mathbb{R}^p$, A matrice (m,p) et $b \in \mathbb{R}^m$ sont des données fixées. Le vecteur x est formé par p variables réelles x_i et * désigne l'opérateur transposé. Les inégalités $x_i \geq 0\,;\, i = 1, \ldots, p\,;$ (*i. e.* $x \geq 0_{\mathbb{R}^p}$) s'appellent **contraintes de positivité**. Désormais, on décide de noter un (PL) sous forme canonique par (FC). Remarquer que les trois exemples précédents sont tous écrits sous forme canonique.

Par ailleurs, la mise sous **forme standard** d'un (PL) quelconque consiste à transformer les contraintes d'inégalités (mise à part les contraintes de positivité) en égalité tout en imposant aux variables d'être positives. Pour ce faire, on ajoute (*resp.* retranche) une variable, dite **variable d'écart**, dans chaque contrainte de type " $\leq$ " (*resp.* " $\geq$ ") tout en lui imposant d'être positive. De plus, si une variable x_i est sans restriction de signe, on la remplace par $x_i^+ - x_i^-$ avec $x_i^+ \geq 0$ et $x_i^- \geq 0$. Bien entendu, si une variable x_i est négative, on la remplace par $x_i' = -x_i$. Pour plus de détail, avec des illustrations à l'appui, consulter par exemple le livre de Droesbeke et al. [10].

Exemple 5 Mettre sous forme standard le (PL) suivant :

$$\begin{cases} \max[Z(x_1, x_2, x_3) = 2x_1 - x_2 + 5x_3] \\ x_1 - 2x_2 \quad = 3 \\ x_1 - x_3 \quad \geq -1 \\ x_2 + x_3 \quad \leq 4 \\ x_1 \geq 0, \; x_2 \geq 0. \end{cases}$$

La première contrainte étant une égalité, elle reste donc inchangée. Pour la deuxième, on lui retranche une variable positive x_4, elle devient $x_1 - x_3 - x_4 = -1$. Quant à la troisième contrainte, on lui ajoute une variable positive x_5 pour devenir $x_2 + x_3 + x_5 = 4$. Concernant la variable x_3 qui est sans restriction de signe, elle est remplacée par $x_3^+ - x_3^-$, avec $x_3^+ \geq 0$ et $x_3^- \geq 0$. En conclusion, la forme standard associée à ce (PL) s'écrit

$$\begin{cases} \max[Z(x) = 2x_1 - x_2 + 5x_3^+ - 5x_3^-] \\ x_1 - 2x_2 \quad = 3 \\ x_1 - x_3^+ + x_3^- - x_4 \quad = -1 \\ x_2 + x_3^+ - x_3^- + x_5 \quad = 4 \\ x = (x_1, x_2, x_3^+, x_3^-, x_4, x_5) \geq 0_{\mathbb{R}^6}. \end{cases}$$

Les variables du (PL) initial s'appellent **variables de décision**, celles de la forme standard associée s'appellent **variables structurelles**. Pour

écrire un problème (FC) sous forme standard, il faut ajouter aux m contraintes d'inégalité $Ax \leq b$, exactement m variables d'écart positives. Si on désigne par $y_i = x_i$ pour $i = 1, \ldots, p$ et par y_{p+i} ; $i = 1, \ldots, m$; les m variables d'écart, la mise sous forme du problème (FC) décrit précédemment donne :

$$\begin{cases} \max(\text{ou } \min)[\tilde{Z}(y) = \tilde{c}^* y] \\ My = b \\ y \geq 0_{\mathbb{R}^{m+p}} \end{cases} \quad \text{où } M = [A \;\; I_m] \text{ et } \tilde{c} = \binom{c}{0_{\mathbb{R}^m}}.$$

La matrice I_m désigne la matrice identité d'ordre m.

Cette forme d'écriture d'un (PL) est introduite tout simplement parce que l'algorithme du simplexe ne s'applique qu'aux formes standards. En d'autres termes, pour résoudre un (PL) par le simplexe, il faut tout d'abord l'écrire sous forme standard. Etant donné qu'on résout le (PL) proprement dit et non la forme standard associée, la question naturelle qu'on se pose est de savoir comment retrouver une solution optimale du (PL) initial à partir d'une solution optimale de sa forme standard. Le théorème suivant établit le lien entre une solution optimale d'un (PL) et celle de sa forme standard, et on se limite au cas où le (PL) considéré est une (FC).

Théorème 2.1.1 *v est une solution optimale de (FC) si et seulement si $\binom{v}{b-Av}$ est une solution optimale de la forme standard associée. De plus, on a $Z(v) = \tilde{Z}\binom{v}{b-Av}$.*

Démonstration. Considérons une solution optimale v de (FC) et montrons que $\binom{v}{b-Av}$ est une solution optimale pour sa forme standard. Tout d'abord, puisque v est réalisable, on a $v \geq 0_{\mathbb{R}^p}$ et $b - Av \geq 0_{\mathbb{R}^m}$, et par conséquent $\binom{v}{b-Av} \geq 0_{\mathbb{R}^{m+p}}$. De plus, on a :

$$M\binom{v}{b-Av} = [A \;\; I_m]\binom{v}{b-Av} = Av + I_m(b - Av) = b.$$

Donc, le point $\binom{v}{b-Av}$ est réalisable pour la forme standard associée à (FC). D'autre part, tout point réalisable $y = \binom{y^p}{y^m}$ de (FS), où y^p (*resp.* y^m) désigne les p premières (*resp.* m dernières) composantes de y, vérifie :

$$\tilde{Z}(y) = \tilde{c}^* y = (c^* \; 0^*_{\mathbb{R}^m})\binom{y^p}{y^m} = c^* y^p = Z(y^p).$$

Ainsi, on obtient $\tilde{Z}\binom{v}{b-Av} = Z(v)$. Sans perte de généralité, on suppose que le problème est de type maximisation. Compte tenu de l'optimalité de v, on obtient $Z(y^p) \leq Z(v)$ et par suite $\tilde{Z}(y) \leq \tilde{Z}\binom{v}{b-Av}$.

Réciproquement, supposons que $\binom{v}{b-Av}$ est une solution optimale de la forme standard. Ce point optimal vérifie entre autres $v \geq 0_{\mathbb{R}^p}$ et $b - Av \geq 0_{\mathbb{R}^m}$. Par conséquent, v est réalisable pour (FC). Maintenant, soit x un point de $\mathbb{R}^p$ qui vérifie $Ax \leq b$ et $x \geq 0_{\mathbb{R}^p}$. Il est facile de vérifier que $\binom{x}{b-Ax}$ est réalisable pour la forme standard. D'où

$$Z(x) = \tilde{Z}\binom{x}{b-Ax} \leq \tilde{Z}\binom{v}{b-Av} = Z(v).$$

En conclusion, le point v est optimal pour (FC).

□

Ce théorème se généralise bien évidemment pour tout (PL) quelque soit son type d'écriture. A titre d'illustration, pour l'Exemple 5 qui n'est pas sous forme canonique, si $(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6)$ est une solution optimale de la forme standard associée, compte tenu des variables d'écart et du changement de variable considérés, on peut dire que $(v_1, v_2, v_3 - v_4)$ est une solution optimale du (PL) initial.

2.2 Notion de base réalisable

Désormais, on note tout (PL) écrit sous forme standard par (FS). De la structure même de la mise sous forme standard, l'écriture matricielle d'un problème (FS) possède la forme suivante :

$$(\text{FS}) \begin{cases} \max(\text{ou } \min)[Z(y) = c^* y] \\ My = b \\ y \geq 0_{\mathbb{R}^n}, \end{cases}$$

où $c \in \mathbb{R}^n$, M matrice (m, n) et $b \in \mathbb{R}^m$ sont des données fixées. La matrice M contient toujours plus de colonnes que de lignes (*i. e.* $n > m$) vu que le nombre de variables structurelles n (variables de décision + variables d'écart + variables dûes aux variables sans restriction de signe) dépasse le nombre de contraintes m. Lors de la résolution, on ne fera pas de distinction entre ces variables. Sans perte de généralité, on suppose que la matrice M est de rang m. Sinon, de deux choses l'une, ou bien il y a une (ou plusieurs) équation qui est combinaison linéaire des autres

équations, qu'il faut alors enlever, ou bien le système est incompatible et dans ce cas le système linéaire $My = b$ n'admet aucune solution.

Notons par M_i la $i^{\text{ième}}$ colonne de M. Le vecteur colonne My s'écrit alors

$$My = \sum_{i=1}^{n} y_i M_i, \text{ où } y_i \text{ est } i^{\text{ième}} \text{ composante de } y.$$

On appelle **système de variables de base**, tout ensemble de m variables distinctes y_i, $i \in J$, prises parmi $y_1, \ldots, y_n$, telles que le déterminant des vecteurs M_i, $i \in J$, est différent de zéro. On rappelle que l'entier m désigne le nombre de contraintes d'égalité qui apparaissent dans (FS). La matrice carrée formée par les m colonnes M_i, $i \in J$, s'appelle **base** et les variables y_i, $i \notin J$, s'appellent **variables hors base.** Autrement dit, une base B du problème (FS) n'est autre qu'une sous matrice carrée de M d'ordre m et inversible. Pour mieux visualiser une telle base B, on effectue des permutations de colonnes de sorte que la base B apparaisse sur les m premières colonnes de M. Ainsi, on met M sous la forme suivante :

$$M = [B \;\; N], \text{ où } \begin{cases} B = (M_i, i \in J) \text{ matrice d'ordre } m \text{ inversible} \\ N = (M_i, i \notin J) \text{ matrice } (m, n-m). \end{cases}$$

Les variables y_i, $i = 1, \ldots, n$, peuvent aussi être classées selon B et N :

$$y = \left(\begin{smallmatrix} y_B \\ y_N \end{smallmatrix}\right), \text{ où } y_B = (y_i, i \in J) \text{ et } y_N = (y_i, i \notin J).$$

Désormais, l'ensemble J des indices de base sera noté par J_B et son complémentaire par J_N. En respectant cette partition, le système $My = b$ vérifie :

$$My = b \Leftrightarrow [B \;\; N]\left(\begin{smallmatrix} y_B \\ y_N \end{smallmatrix}\right) \Leftrightarrow By_B + Ny_N = b \Leftrightarrow y_B = B^{-1}b - B^{-1}Ny_N.$$

Par suite, l'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}^n$ du système linéaire $My = b$ est égal à :

$$\{y \in \mathbb{R}^n \;/\; My = b\} = \{\left(\begin{smallmatrix} B^{-1}b - B^{-1}Ny_N \\ y_N \end{smallmatrix}\right) \;/\; y_N \in \mathbb{R}^{n-m}\} \tag{2.1}$$

Parmi les solutions de ce système, nous distinguons les solutions dites de base pour lesquelles[1] $y_N = 0_N$. Une telle solution existe et elle vaut

[1] On écrit 0_N à la place de $0_{R^{n-m}}$ pour dire que les variables hors base sont nulles.

$y = \binom{B^{-1}b}{0_N}$. Cette solution de base est réalisable (*i. e.* elle vérifie les contraintes $My = b$ et $y \geq 0_{\mathbb{R}^n}$) si et seulement si $B^{-1}b \geq 0_B$. Dans ce cas, on dit que la **base** B **est réalisable**. Noter que toute solution de base réalisable admet $(n-m)$ composantes nulles relatives aux variables hors base, les autres composantes vérifient un système de Cramer d'ordre m.

Théorème 2.2.1 *Si le domaine réalisable*

$$\mathcal{Y} = \{y \in \mathbb{R}^n \ / \ My = b \text{ et } y \geq 0_{\mathbb{R}^n}\}$$

est non vide, alors il existe une solution de base réalisable.

Démonstration. (Voir exercice 2.6.10) □

Ce théorème assure l'existence d'une base réalisable dans le cas où les contraintes d'égalité sont compatibles entre elles et avec les contraintes de positivité. Par analogie au Théorème 1.3.3, nous allons établir que lorsque (FS) admet une solution, on peut toujours chercher une solution optimale parmi les solutions de base réalisable.

Théorème 2.2.2 *Si un problème (FS) admet un optimum global, il existe toujours une solution optimale qui est une solution de base réalisable.*

Démonstration. Tout d'abord, on remarque que le domaine réalisable

$$\mathcal{Y} = \{y \in \mathbb{R}^n \ / \ My = b \text{ et } y \geq 0_{\mathbb{R}^n}\}$$

est l'intersection de $2m+n$ demi-espaces : $My \leq b$, $My \geq b$ et $y \geq 0_{\mathbb{R}^n}$. L'ensemble $\mathcal{Y}$ est donc un polyèdre de $\mathbb{R}^n$. D'après le théorème 1.3.3, il existe une solution optimale A qui est un sommet de $\mathcal{Y}$. Par définition, le point réalisable A est dit sommet de $\mathcal{Y}$ s'il existe n hyperplans frontières de $\mathcal{Y}$ dont l'intersection est réduite à A. Le système linéaire qui découle de ces n hyperplans est nécessairement de Cramer. Parmi les $2m$ demi-espaces $My \leq b$ et $My \geq b$, le point A vérifie alors au plus m équations qui sont extraites des m hyperplans frontières $My = b$. Les $(n-m)$ hyperplans restants doivent être extraites des n hyperplans frontières

$y = 0_{\mathbb{R}^n}$. Par conséquent, tout sommet de $\mathcal{Y}$ admet $(n-m)$ composantes nulles, les autres composantes sont solution d'un système linéaire de Cramer d'ordre m. En conclusion, un sommet de $\mathcal{Y}$ est forcément une solution de base réalisable.

□

Dans ce théorème, on a démontré que tout sommet du domaine réalisable $\mathcal{Y}$ est une solution de base réalisable. Il est facile de vérifier que la réciproque est vraie. Les sommets de $\mathcal{Y}$ correspondent donc aux solutions de base réalisable. De ce fait, l'algorithme du simplexe ne s'intéresse qu'aux solutions de type $y = \binom{B^{-1}b}{0_N}$ avec $B^{-1}b \geq 0_B$. Ces solutions de base réalisable sont bien évidemment en nombre fini.

Théorème 2.2.3 *Pour une forme canonique, l'ensemble des sommets du domaine réalisable est en bijection avec l'ensemble des solutions de base réalisable de la forme standard associée.*

Démonstration. (Voir Exercice 2.6.11)

□

Une solution de base réalisable $y = \binom{B^{-1}b}{0_N}$ est dite **dégénérée**, si en plus des $(n-m)$ composantes nulles relatives à 0_N il existe une composante du vecteur $B^{-1}b$ qui est nulle. Elle est **non dégénérée** dans le cas où toutes les composantes de $B^{-1}b$ sont non nulles et par suite strictement positives. De même, on dit qu'une base réalisable est dégénérée si la solution de base associée est dégénérée. Il est intéressant de noter qu'un point dégénéré est solution de plusieurs bases réalisables. En effet, tout vecteur colonne $u = B^{-1}b$ relatif à une base dégénérée B admet au moins une coordonnée u_{i_0}, $i_0 \in J_B$, qui est nulle. Alors, en considérant que $B = (M_i,\ i \in J_B)$, on obtient :

$$\begin{aligned} u = B^{-1}b &\iff Bu = b \\ &\iff \sum_{i \in J_B} u_i M_i = b \\ &\iff \sum_{i \in J_B \setminus \{i_0\}} u_i M_i = b, \text{ car } u_{i_0} = 0. \end{aligned}$$

Dans la matrice B, nous allons remplacer le vecteur colonne M_{i_0} par un autre vecteur M_{j_0}, $j_0 \in J_N$, de sorte que la matrice B' ainsi ob-

tenue soit inversible. Il est clair que u est solution du système linéaire $B'x = b$, étant donné que $\sum_{i \in J_B \setminus \{i_0\}} u_i M_i + 0 M_{j_0} = b$. Cette solution est unique en raison de la régularité de la matrice B'. Donc, les deux bases réalisables B et B' donnent toutes les deux la même solution de base $\binom{u}{0_N}$.

Exemple 6 On considère la (FC) ci-dessous.

$$\begin{cases} \min[Z(x) = -3x_1 - x_2] \\ -x_1 + 2x_2 \quad \leq 2 \\ x_1 + 2x_2 \quad \leq 10 \\ x_1 \quad \leq 4 \\ x = (x_1, x_2) \geq 0_{\mathbb{R}^2}. \end{cases}$$

1 - Donner une représentation graphique du domaine réalisable.

2 - Montrer que $x_0 = (4, 3)$ est un sommet du domaine réalisable. Que peut-on observer ?

3 - Ecrire cette (FC) sous forme standard, puis donner le point réalisable y_0, de cette forme standard, associé à x_0.

4 - Puisque x_0 est un sommet, on sait que y_0 est une solution de base réalisable. Donner une base B_0 associée à y_0 et montrer qu'elle est dégénérée.

5 - Proposer une autre base B'_0 ayant y_0 comme solution de base.

6 - Y a-t-il une relation entre la dégénérescence de B_0 et le fait que par x_0 passent trois (et non deux) hyperplans frontières ?

Le domaine réalisable est schématisé en gris dans la figure ci-après. Concernant le point x_0, il est facile de vérifier qu'il est réalisable. De plus, l'intersection des deux hyperplans frontières $x_1 = 4$ et $-x_1 + 2x_2 = 2$ est réduite à x_0. Il vient que x_0 est un sommet du domaine réalisable. D'après la Figure 2.1, on peut remarquer qu'au point x_0, il passe non seulement 2 mais 3 hyperplans frontières.

La forme standard du problème s'écrit comme suit :

$$\begin{cases} \min[Z(y) = -3y_1 - y_2] \\ -y_1 + 2y_2 + y_3 \quad = 2 \\ y_1 + 2y_2 + y_4 \quad = 10 \\ y_1 + y_5 \quad = 4 \\ y = (y_1, \ldots, y_5) \geq 0_{\mathbb{R}^5}. \end{cases}$$

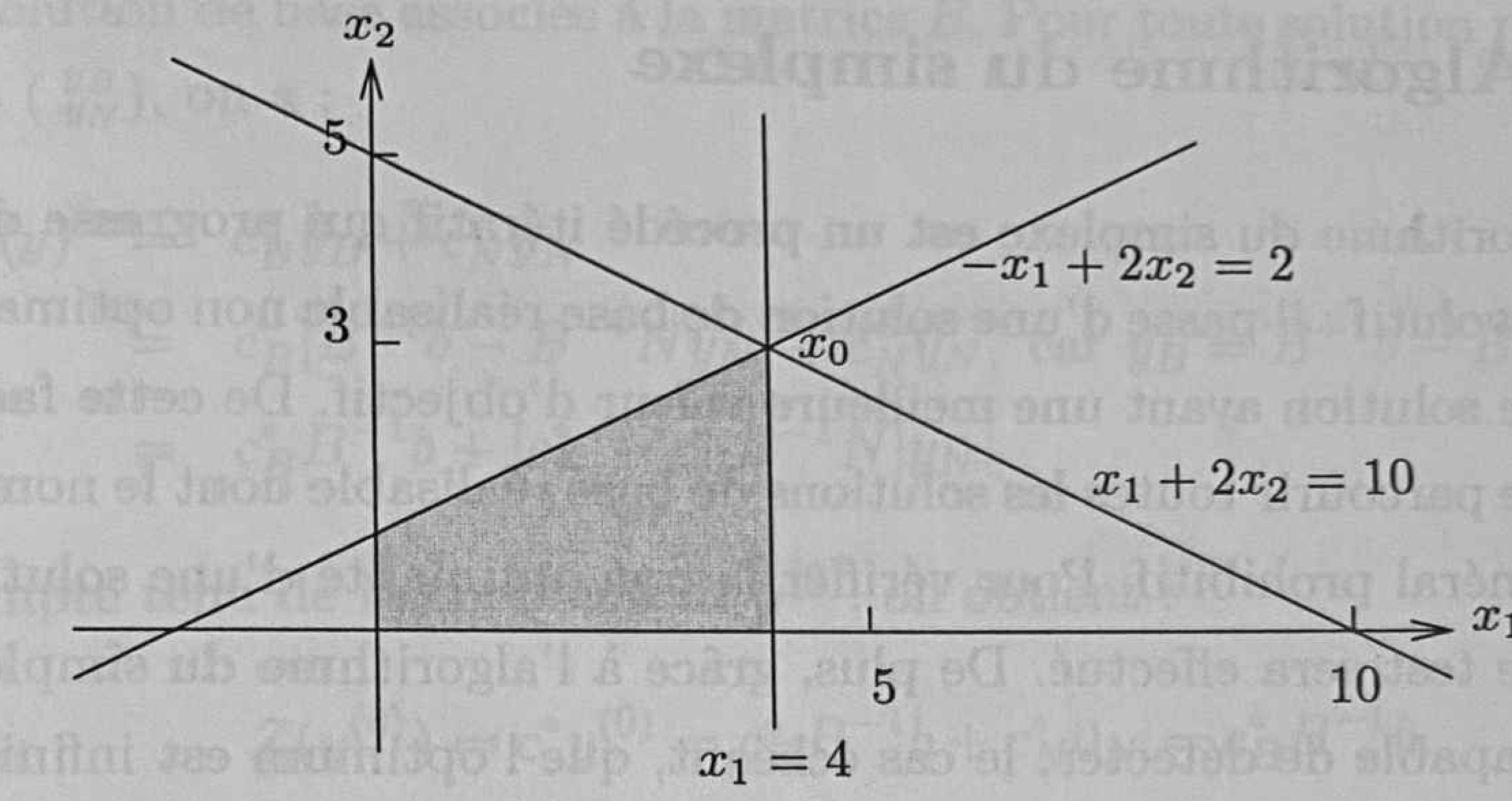


FIG. 2.1 – Domaine réalisable pour l'Exemple 5

Le point y_0 en question est formé par x_0 auquel on concatène les variables d'écart, qui sont en l'occurrence les composantes de $b - Ax_0$. Donc, on obtient $y_0 = (4, 3, 0, 0, 0)$. Considérons le système de variables $\{y_1, y_2, y_3\}$, la base associée est

$$B_0 = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

En résolvant le système linéaire $B_0 x = b$, on obtient aisément la solution suivante :

$$x = B_0^{-1} b = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Puisque $B_0^{-1}b$ possède une composante nulle, la base B_0 est, par définition, dégénérée. Par ailleurs, on vérifie facilement que la base B'_0, relative au système de variables $\{y_1, y_2, y_4\}$, admet y_0 comme solution de base.

La relation entre la dégénérescence de B_0 et le fait que par x_0 passent 3 (et non 2) hyperplans frontières est évidente : chaque choix de 2 hyperplans frontières parmi les 3 disponibles aboutit à une base réalisable. Cela s'explique naturellement par le fait de choisir 2 hyperplans frontières équivaut à imposer aux variables d'écart, figurant des les 2 contraintes associées, d'être hors base. Etant donné que l'on ait 3 choix possibles, on aura 3 bases réalisables différentes qui sont toutes dotées de la même solution de base y_0. Ceci n'est possible qu'en cas de dégénérescence.

2.3 Algorithme du simplexe

L'algorithme du simplexe est un procédé itératif qui progresse dans un sens évolutif : il passe d'une solution de base réalisable non optimale à une autre solution ayant une meilleure valeur d'objectif. De cette façon, il évite de parcourir toutes les solutions de base réalisable dont le nombre est en général prohibitif. Pour vérifier la non optimalité d'une solution, un simple test sera effectué. De plus, grâce à l'algorithme du simplexe, on sera capable de détecter, le cas échéant, que l'optimum est infini.

2.3.1 Conditions d'optimalité

La fonction d'objectif $Z(y) = c^*y$ est entièrement définie par la donnée du vecteur $c = (c_i, i = 1, \ldots, n)$. A chaque base $B = (M_i, i \in J_B)$, on note $c_B = (c_i, i \in J_B)$ et $c_N = (c_i, i \in J_N)$. D'une façon équivalente, le vecteur c_B (*resp.* c_N) s'obtient à partir de c en prenant les coordonnée c_i relatives aux variables de base (*resp.* hors base) associée à la matrice B (*resp.* N). Le classement du vecteur c selon J_B et J_N donne $c = \binom{c_B}{c_N}$. Naturellement, on dit qu'une **base B est optimale** si la solution associée $y = \binom{B^{-1}b}{0_N}$ est optimale.

Théorème 2.3.1 *On se donne une base réalisable B du problème (FS). Si la forme standard (FS) est de type maximisation (resp. minimisation), on considère le vecteur ligne $w_N^* = c_N^* - c_B^* B^{-1}N$ (resp. $w_N^* = c_B^* B^{-1}N - c_N^*$). Alors, on a :*

(i) $$w_N^* \leq 0_N^* \Longrightarrow B \text{ est optimale.}$$

(ii) Si de plus la base B est non dégénérée (i. e. $B^{-1}b > 0_B$), alors

$$B \text{ est optimale} \Longrightarrow w_N^* \leq 0_N^*.$$

Démonstration. Soit B une base réalisable vérifiant $w_N^* \leq 0_N^*$. Notons par

$$y^{(0)} = \binom{B^{-1}b}{0_N}$$

la solution de base associée à la matrice B. Pour toute solution réalisable $y = \binom{y_B}{y_N}$, on a :

$$\begin{aligned} Z(y) &= c_B^* y_B + c_N^* y_N \\ &= c_B^*[B^{-1}b - B^{-1}Ny_N] + c_N^* y_N, \text{ car } y_B = B^{-1}b - B^{-1}Ny_N \\ &= c_B^* B^{-1}b + [c_N^* - c_B^* B^{-1}N]y_N. \end{aligned}$$

Compte tenu de l'expression de $y^{(0)}$, on obtient :

$$Z(y^{(0)}) = c^* y^{(0)} = c_B^* B^{-1}b + c_N^* 0_N = c_B^* B^{-1}b.$$

D'où

$$Z(y) = Z(y^{(0)}) + [c_N^* - c_B^* B^{-1}N]y_N.$$

De la définition même du vecteur w_N^*, il en découle ce qui suit :

$$Z(y) = \begin{cases} Z(y^{(0)}) + w_N^* y_N & \text{si “max”} \\ Z(y^{(0)}) - w_N^* y_N & \text{si “min”}. \end{cases} \tag{2.2}$$

Puisque $w_N^* \leq 0_N^*$ et $y_N \geq 0_N$, le réel $w_N^* y_N$ est de signe négatif. D'où

$$Z(y) \begin{cases} \leq Z(y^{(0)}) & \text{si “max”} \\ \geq Z(y^{(0)}) & \text{si “min”}. \end{cases} \tag{2.3}$$

Ceci prouve que $y^{(0)}$ est une solution optimale du problème (FS). La démonstration de la propriété (i) est ainsi achevée.

Pour montrer (ii), nous allons raisonner par contraposé. Supposons donc qu'il existe une composante w_s de w_N^* qui est strictement positive. Cette composante est exactement égale à $w_s = w_N^* e_s$, où e_s est le vecteur de $\mathbb{R}^{n-m}$ qui contient 1 au niveau de la coordonnée s et 0 ailleurs. Notons par $\gamma = B^{-1}Ne_s$ et considérons le réel λ défini par

$$\lambda = \begin{cases} \min\{\frac{(B^{-1}b)_j}{\gamma_j}\ ;\ \text{pour } j = 1, \ldots, m \ /\ \gamma_j > 0\}, & \text{si } \gamma \not\leq 0_B \\ \\ \text{réel} > 0 \text{ arbitraire}, & \text{sinon}. \end{cases}$$

Etant donné que $B^{-1}b > 0_B$, le paramètre λ est nécessairement strictement positif. De la définition même de λ, on peut affirmer que $B^{-1}b - \lambda\gamma \geq 0_B$. Considérons maintenant le vecteur

$$y^{(1)} = \binom{y_B^{(1)}}{y_N^{(1)}} \text{ défini par } \begin{cases} y_B^{(1)} = B^{-1}b - \lambda\gamma \\ y_N^{(1)} = \lambda e_s. \end{cases}$$

Il est clair que $y^{(1)} \geq 0_{\mathbb{R}^n}$. De plus, on a :

$$\begin{aligned} My^{(1)} &= By_B^{(1)} + Ny_N^{(1)} \\ &= B(B^{-1}b - \lambda\gamma) + \lambda Ne_s, \text{ car } \begin{cases} y_B^{(1)} = B^{-1}b - \lambda\gamma \\ y_N^{(1)} = \lambda e_s \end{cases} \\ &= BB^{-1}b - \lambda Ne_s + \lambda Ne_s, \text{ car } \gamma = B^{-1}Ne_s \\ &= b, \text{ car } BB^{-1}b = I_m b = b. \end{aligned}$$

Par suite, le point $y^{(1)}$ est réalisable. D'après l'égalité (2.2), tout point réalisable y vérifie $Z(y) = Z(y^{(0)}) \pm w_N^* y_N$ selon que (FS) soit de type maximisation ou minimisation. Donc, on obtient :

$$\begin{aligned} Z(y^{(1)}) &= Z(y^{(0)}) \pm w_N^* y_N^{(1)} \\ &= Z(y^{(0)}) \pm \lambda w_N^* e_s, \text{ car } y_N^{(1)} = \lambda e_s \\ &= Z(y^{(0)}) \pm \lambda w_s, \text{ car } w_N^* e_s = w_s. \end{aligned}$$

Par hypothèse w_s est strictement positif, et par construction le paramètre λ est aussi strictement positif. D'où

$$Z(y^{(1)}) \begin{cases} > Z(y^{(0)}) & \text{si "max"} \\ < Z(y^{(0)}) & \text{si "min".} \end{cases}$$

Cela prouve bien que le point $y^{(0)}$ n'est pas optimal.

□

Essayons de donner une interprétation économique du vecteur w_N^*. A partir de la solution réalisable $y^{(0)} = \binom{B^{-1}b}{0_N}$, on construit le point y' obtenu en augmentant d'une unité la $s^{\text{ième}}$ variable hors base. D'après l'égalité (2.1), ce point vaut $y' = \binom{B^{-1}b - B^{-1}Ne_s}{e_s}$. Si le point ainsi obtenu est réalisable, on obtient grâce à (2.2) :

$$Z(y') = Z(y^{(0)}) \pm w_N^* e_s = Z(y^{(0)}) \pm w_s, \text{ car } w_N^* e_s = w_s.$$

Pour un problème de type maximisation, cette dernière égalité s'écrit

$$Z(y') = Z(y^{(0)}) + w_s.$$

Donc, l'élément w_s représente la quantité s'ajoutant à la valeur économique Z lorsqu'on incrémente d'une unité la $s^{\text{ième}}$ coordonnée

hors base de $y^{(0)}$, pour autant que le nouveau point obtenu soit réalisable. Semblablement, lorsqu'il s'agit d'un problème de minimisation, w_s correspond à la valeur retranchée de la valeur économique. C'est la raison pour laquelle w_N^* s'appelle vecteur des **coûts réduits** (ou **coûts fictifs** ou encore **coûts marginaux**).

La condition d'optimalité $w_N^* \leq 0_N^*$ peut être interprétée comme un test d'arrêt des itérations pour l'algorithme du simplexe. Il reste à décrire la technique qui permet de passer d'une solution de base réalisable non optimale à une autre solution de base réalisable ayant une meilleure valeur économique. Cette partie fera l'objet du paragraphe suivant.

2.3.2 Amélioration de la fonction d'objectif

On se donne une base réalisable $B = (B_1, \ldots, B_m)$. Le vecteur B_i désigne la $i^{\text{ième}}$ colonne de B qui est à fortiori une colonne de M. On note aussi N_j la colonne d'indice j de la matrice N. D'ailleurs, N_j n'est autre Ne_j où e_j est le $j^{\text{ième}}$ vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^{n-m}$.

Théorème 2.3.2 *On suppose que la base réalisable B vérifie $w_N^* \not\leq 0_N^*$. Il existe donc une composante w_s du vecteur w_N^* qui est strictement positive. Considérons le $s^{\text{ième}}$ vecteur colonne $\gamma = B^{-1}N_s$ de la matrice $B^{-1}N$. Alors de deux choses l'une*

- *ou bien $\gamma \leq 0_B$, et dans ce cas l'optimum est infini,*
- *ou bien $\gamma \not\leq 0_B$. Dans ce cas, on calcule le réel*

$$\lambda = \min\{\frac{(B^{-1}b)_i}{\gamma_i} \; ; \; pour \; i = 1, \ldots, m \; / \; \gamma_i > 0\},$$

et on détermine un indice $r \in \{1, \ldots, m\}$ pour lequel ce minimum λ est atteint (i. e. $\lambda = \frac{(B^{-1}b)_r}{\gamma_r}$). Alors, la matrice B', obtenue à partir de $B = (B_1, \ldots, B_m)$ en remplaçant le vecteur colonne B_r par N_s, est une base réalisable. La solution de base $y^{(1)} = \binom{B'^{-1}b}{0_{N'}}$ associée à B' vérifie

$$(B'^{-1}b)_i = \begin{cases} (B^{-1}b)_i - \lambda\gamma_i & si \; i \neq r \\ \lambda & si \; i = r. \end{cases}$$

De plus, on a :

$$Z(y^{(1)}) = \begin{cases} Z(y^{(0)}) + \lambda w_s & si \text{ “max”} \\ Z(y^{(0)}) - \lambda w_s & si \text{ “min”}. \end{cases}$$

Ici, le point $y^{(0)}$ représente la solution de base réalisable associée à B : $y^{(0)} = \binom{B^{-1}b}{0_N}$.

Démonstration. Supposons que $\gamma \leq 0_B$. Pour tout réel $\lambda \geq 0$, le point

$$y_\lambda = \begin{pmatrix} B^{-1}b - \lambda\gamma \\ \lambda e_s \end{pmatrix}$$

vérifie $B^{-1}b - \lambda\gamma \geq 0_B$ et $\lambda e_s \geq 0_N$. D'après (2.1), l'égalité $My_\lambda = b$ est bien satisfaite. Cette dernière égalité ajoutée à la positivité du vecteur y_λ assurent, toutes les deux, que y_λ est réalisable. Aussi, la formule (2.2) entraîne que $Z(y_\lambda) = Z(y^{(0)}) \pm \lambda w_s$, où $y^{(0)} = \binom{B^{-1}b}{0_N}$. Par hypothèse, on a $w_s > 0$, ce qui donne :

$$Z(y_\lambda) = \begin{cases} Z(y^{(0)}) + \lambda w_s & \text{si "max"} \\ \\ Z(y^{(0)}) - \lambda w_s & \text{si "min"} \end{cases} \xrightarrow{\lambda \to +\infty} \begin{cases} +\infty, \text{ et donc } \sup\limits_{y \in \mathcal{Y}} Z(y) = +\infty \\ -\infty, \text{ et donc } \inf\limits_{y \in \mathcal{Y}} Z(y) = -\infty. \end{cases}$$

Supposons maintenant que $\gamma \not\leq 0_B$ (*i. e.* il existe au moins une coordonnée $i \in \{1, \ldots, m\}$ telle que $\gamma_i > 0$). Dès lors, on calcule le réel

$$\lambda = \min\{\frac{(B^{-1}b)_i}{\gamma_i} \ ; \text{ pour } i = 1, \ldots, m \ / \ \gamma_i > 0\},$$

et on choisit une coordonnée r pour lequel le minimum λ est atteint. Considérons la matrice B' obtenue à partir de $B = (B_1, \ldots, B_m)$ en remplaçant la colonne B_r par N_s. En d'autres termes, la variable de base relative à B_r est remplacée par la variable hors base associée à N_s et vice versa. Montrons que B' est une base réalisable.

Par un raisonnement par l'absurde, on vérifie que B' est inversible, puis on prouve assez facilement que

$$(B'^{-1}b)_i = \begin{cases} (B^{-1}b)_i - \lambda\gamma_i & \text{si } i \neq r \\ \lambda & \text{si } i = r. \end{cases}$$

La définition même de l'indice r conduit à l'égalité $\lambda = \frac{(B^{-1}b)_r}{\gamma_r}$. Le paramètre λ est construit de sorte que $\lambda\gamma_i \leq (B^{-1}b)_i$ pour tout i vérifiant $\gamma_i > 0$. Concernant les indices i pour lesquels $\gamma_i \leq 0$, on obtient $\lambda\gamma_i \leq 0$ en raison de la positivité de λ, et par conséquent $\lambda\gamma_i \leq (B^{-1}b)_i$. Il

s'en suit que les composantes du vecteur $B'^{-1}b$ sont toutes positives. Ainsi, la base B' est réalisable, et par définition la solution de base est $y^{(1)} = \binom{B'^{-1}b}{0_{N'}}$. Remarquer que le classement des coordonnées de $y^{(1)}$ selon J_B et J_N donne

$$y^{(1)} = \begin{pmatrix} y_B^{(1)} = B^{-1}b - \lambda\gamma \\ y_N^{(1)} = \lambda e_s \end{pmatrix}.$$

En effet, au niveau de la variable relative à N_s qui est devenue une variable de base, on a bien $(y_N^{(1)})_s = (B'^{-1}b)_r = \lambda$. Par contre, la variable associée à B_r, qui est devenue une variable hors base, vérifie $(y_B^{(1)})_r = (B^{-1}b)_r - \lambda\gamma_r = 0$. Compte tenu de l'expression de $B'^{-1}b$, on obtient $y^{(1)} = \binom{B^{-1}b-\lambda\gamma}{\lambda e_s}$. Ainsi, le point réalisable $y^{(1)}$ se voit attribuée la valeur économique :

$$Z(y^{(1)}) = Z(y^{(0)}) \pm \lambda w_s, \text{ d'après la formule (2.2).}$$

Enfin, il résulte de ce qui précède que $y^{(1)}$ possède une meilleure valeur économique étant donné que $\lambda \geq 0$ et $w_s > 0$. La démonstration de ce théorème est ainsi achevée.

□

Il est intéressant de remarquer que dans le cas où la base réalisable B est non dégénérée, le paramètre λ est strictement positif. Sans aucun doute, le point construit $y^{(1)}$ possède, en cas de non dégénérescence, une valeur économique strictement meilleure que celle de $y^{(0)}$.

Les deux théorèmes précédents nous conduisent à l'algorithme du simplexe suivant.

Algorithm 1 Algorithme du simplexe

Require: base réalisable B

$y_B = B^{-1}b$

$Z = c_B^* y_B$

$$w_N^* = \begin{cases} c_N^* - c_B^* B^{-1}N & \text{si "max"} \\ c_B^* B^{-1}N - c_N^* & \text{si "min"} \end{cases}$$

while $w_N^* \not\leq 0_N^*$ **do**

  choisir s telle que $w_s = w_N^* e_s > 0$

  $\gamma = B^{-1}N_s$

  if $\gamma \leq 0_B$ **then**

$$\text{optimum infini /* } \begin{cases} \sup_{y \in \mathcal{Y}} Z(y) = +\infty & \text{si "max"} \\ \inf_{y \in \mathcal{Y}} Z(y) = -\infty & \text{si "min"} \end{cases} \text{ */}$$

    exit

  else

    calculer $\lambda = \min\{\frac{(B^{-1}b)_i}{\gamma_i}\ ;\ \text{pour } i = 1, \ldots, m \ /\ \gamma_i > 0\}$

    déterminer l'indice r pour lequel λ est atteint

  end if

$$Z \leftarrow \begin{cases} Z + \lambda w_s & \text{si "max"} \\ Z - \lambda w_s & \text{si "min"} \end{cases}$$

  $B \leftarrow B'$ /* B_r est remplace par N_s */

  $N \leftarrow N'$ /* N_s est remplace par B_r */

$$(y_B)_i \leftarrow \begin{cases} (y_B)_i - \lambda \gamma_i & \text{pour } i \neq r \\ \lambda & \text{pour } i = r \end{cases}$$

  Calculer w_N^*

end while

Optimum atteint en $y = \binom{y_B}{0_N}$ et il vaut Z

Dans la pratique, le choix de w_s est souvent multiple, il se peut que plusieurs composantes w_N^* soient strictement positives. Etant donné que la nouvelle solution $y^{(1)}$ vérifie $Z(y^{(1)}) = Z(y^{(0)}) \pm \lambda w_s$, il serait commode de choisir la plus grande composante w_s de w_N^* strictement positive. Il arrive aussi que le minimum λ soit atteint pour deux ou plusieurs coordonnées différentes. Dans ce cas de figure, on prendra le plus petit indice r qui réalise le minimum λ. Pour des raisons de stabilité numérique et par analogie avec la méthode de Gauss avec pivot partiel [17, 30], un autre critère de choix est souvent considéré. Il consiste à choisir r de façon à ce que γ_r soit le plus élevé parmi les éléments γ_i strictement positifs.

2.3.3 Tableau simplexe

Les éléments qui interviennent dans l'algorithme du simplexe peuvent être récapitulés dans ce qui suit.

- Les variables de base et les variables hors base. La base réalisable B et la matrice N seront immédiatement identifiées à partir des variables de base et hors base.
- La solution $y = \binom{B^{-1}b}{0_N}$ associée à la base réalisable B. Puisque $y_N = 0_N$, on ne retient que le vecteur $y_B = B^{-1}b$.
- Le vecteur $w_N^* = \pm[c_N^* - c_B^* B^{-1}N]$ pour tester l'optimalité.
- La matrice $B^{-1}N$ afin de calculer w_N^* et le coefficient λ.
- La valeur de la fonction Z au point $y = \binom{B^{-1}b}{0_N}$ qui est égale à $Z(y) = c_B^* y_B$.

A chaque base réalisable B correspond une itération de l'algorithme du simplexe. Pour rendre pratique l'application manuelle de l'algorithme du simplexe, les éléments décrits ci-dessus sont regroupés dans un tableau de la manière suivante :

$y_{i_{m+1}} \quad \cdots \quad y_{i_n}$		
$B^{-1}N$	$B^{-1}b$	y_{i_1} $\vdots$ y_{i_m}
w_N^*	Z	

Les coordonnées $y_{i_1}, \ldots, y_{i_m}$ correspondent aux variables de base, et les coordonnées $y_{i_{m+1}}, \ldots, y_{i_n}$ correspondent aux variables hors base. Le terme Z désigne la valeur de la fonction d'objectif Z au point réalisable $\binom{B^{-1}b}{0_N}$. D'après l'indexation des variables de base, on a :

$$Z = \sum_{j=1}^{m} c_{i_j} y_{i_j}, \text{ avec } y_{i_j} = (B^{-1}b)_j.$$

Dans un objectif explicatif et à titre d'illustration, nous allons résoudre par l'algorithme du simplexe les trois exemples traités dans le chapitre précédent. Ces exemples sont tous de type maximisation. Afin de réduire l'écriture d'une (FS), on présentera chaque problème écrit sous forme standard par les éléments qui le caractérisent, qui sont : le vecteur c, la matrice M et le second membre b.

Exemple 7 Appliquer la méthode du simplexe pour résoudre les trois premiers exemples.

Reprenons l'Exemple 1 :

$$\begin{cases} \max[Z(x_1, x_2) = 4x_1 + 5x_2] \\ 2x_1 + x_2 \ \leq 8 \\ x_1 + 2x_2 \ \leq 7 \\ x_2 \ \leq 3 \\ x_1 \geq 0, \ x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Tout d'abord, on commence par écrire ce problème sous forme standard. En ajoutant les variables d'écart, on obtient :

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ c^* = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } b = \begin{pmatrix} 8 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Il est clair que $\{y_3, y_4, y_5\}$ forme un système de variables de base réalisable. La base associée est $B = I_3$, elle vérifie bien $B^{-1}b = I_3 b = b \geq 0_{\mathbb{R}^3}$. Pour cette base, on obtient :

$$\begin{aligned} B^{-1}N &= N = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ w_N^* &= c_N^* = \begin{pmatrix} 4 & 5 \end{pmatrix}, \text{ car } c_B^* = 0_B^*, \\ \text{et } Z &\leftarrow Z(0,0,8,7,3) = 0. \end{aligned}$$

Rappelons que les coordonnées de chaque solution de base réalisable $\binom{B^{-1}b}{0_N}$ sont classées selon B et N. Pour la base $B = I_3$, si on écrit les coordonnées de la solution réalisable $\binom{B^{-1}b}{0_N} = \binom{b}{0_N}$ dans l'ordre y_i, $i = 1, \ldots, 5$, on obtient exactement le point $(0, 0, 8, 7, 3)$.

<u>Itération 1</u>

y_1	y_2		
2	1	8	y_3
1	2	7	y_4
0	1	3	y_5
4	5	0	

Le vecteur ligne $w_N^* = (4\ 5)$ n'est pas négatif, il contient deux composantes strictement positives. Il a été convenu de choisir la plus grande qui

est 5. Pour distinguer notre choix, on décide de l'écrire en gras. Faisant référence aux notations utilisées dans le Théorème 2.3.2, on a :

$$w_s = 5 \text{ et } \gamma = B^{-1}N_s = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Donc, au cours de l'itération suivante, la variable hors base qui se situe au niveau de w_s va devenir une variable de base. D'après le tableau ci-dessus, il s'agit de la variable y_2. Pour déterminer la variable qui prend place, il va falloir calculer le paramètre λ et en déduire l'indice r. D'après le même tableau, on a :

$$\lambda = \min\{\frac{8}{1}, \frac{7}{2}, \frac{3}{1}\} = 3 \text{ et donc } r \text{ s'identifie au } 3^{\text{ième}} \text{ indice.}$$

L'indice r correspond alors à la variable y_5. On décide de mettre en gras l'élément γ_r qui a permis de réaliser le minimum $\lambda = \frac{(B^{-1}b)_r}{\gamma_r}$. En résumé, lorsqu'on écrit en gras une composante w_s de w_N^*, cela signifie que la variable, figurant sur la même colonne que w_s du tableau simplexe, entre dans la base. Inversement, l'identification de γ_r permet de décider que la variable, située sur la même ligne que γ_r sort de la base. Naturellement, ces deux variables s'appellent respectivement **variable entrante** et **variable sortante**.

Itération 2

A ce stade de calcul, la base réalisable B' est associée aux variables $\{y_3, y_4, y_2\}$. Pour la prochaine itération, on aura besoin de B'' à la place de B'. Afin de ne pas encombrer le texte par les notations, il est naturel de garder les mêmes symboles B, N et λ pour toutes les itérations du simplexe. En tenant compte de l'ordre des indices $J_B = \{3, 4, 2\}$ des variables de base et de $J_N = \{1, 5\}$, on obtient

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } N = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Par un simple calcul, on vérifie les égalités suivantes :

$$B^{-1}N = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \; B^{-1}b = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ et } w_N^* = \begin{pmatrix} 4 & -5 \end{pmatrix}.$$

Le tableau simplexe relatif à cette itération est

y_1	y_5		
2	−1	5	y_3
1	−2	1	y_4
0	1	3	y_2
4	−5	15	

Noter que le vecteur $B^{-1}b$ peut être calculé aussi via la formule :

$$(B^{-1}b)_i \leftarrow \begin{cases} (B^{-1}b)_i - \lambda\gamma_i & \text{pour } i \neq r \\ \lambda & \text{pour } i = r \end{cases}$$

$$= \begin{pmatrix} 8 - 3 \times 1 \\ 7 - 3 \times 2 \\ \lambda \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

De même, la valeur $Z = 15$ qui correspond à $Z(0,3,5,1,0)$ peut être obtenue à travers le résultat $Z \leftarrow Z + \lambda w_s = 0 + 3 \times 5 = 15$. Ces deux constatations restent valables pour les itérations qui suivent et pour n'importe quel exemple.

Pour ce tableau, le vecteur w_N^* admet une seule composante strictement positive qui est $w_s = 4$. Donc, la variable y_1 entre dans la base au cours de l'itération 3. En ce qui concerne le nouveau paramètre λ, on a :

$$\gamma = B^{-1}N_s = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ et par suite } \lambda = \min\{\frac{5}{2}, \frac{1}{1}\} = 1.$$

Ainsi, la variable y_4 devient hors base. Il est intéressant de noter que les matrices B et N peuvent être déduites du tableau simplexe à partir des variables de base et des variables hors base. Dans toute la suite et lors de l'exécution d'une itération simplexe, seul le tableau simplexe sera donné. Bien entendu, on précisera en gras les éléments w_s et γ_r et on calculera le coefficient λ, à chaque fois que cela s'avère nécessaire.

Itération 3

y_4	y_5		
-2	$\mathbf{3}$	3	y_3
1	-2	1	y_1
0	1	3	y_2
-4	$\mathbf{3}$	19	

$$\lambda = \min\{\tfrac{3}{3}, \tfrac{3}{1}\} = 1$$

Itération 4

y_4	y_3		
$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	1	y_5
$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	3	y_1
$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	2	y_2
-2	-1	22	

On a $w_N^* = (-2 \quad -1) \leq (0 \quad 0)$, donc le Théorème 2.3.1 assure que $(3, 2, 0, 0, 1)$ est une solution optimale pour (FS). D'après le Théorème 2.1.1, le point $(3, 2)$ est optimal pour notre (PL) de départ. Il réalise une valeur maximale de Z égale à 22.

Pour l'Exemple 2, le (PL) considéré est

$$\begin{cases} \max[Z(x_1, x_2) = -6x_1 + 15x_2] \\ \quad 2x_1 - x_2 \quad \geq 4 \\ -2x_1 + 5x_2 \quad \leq 4 \\ x_1 \geq 0, \ x_2 \geq 0. \end{cases}$$

En retranchant une variable d'écart à la première contrainte, et en ajoutant une seconde à la deuxième, on obtient :

$$M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 \\ -2 & 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ c^* = \begin{pmatrix} -6 & 15 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } b = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Prenons par exemple $\{y_1, y_4\}$ et montrons qu'il forme un système de variables de base réalisable. La matrice B associée à ce système vérifie :

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow B^{-1}b = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

Les composantes de $B^{-1}b$ étant positives, la matrice B est une base réalisable. D'où

$$B^{-1}N = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 4 & -1 \end{pmatrix},$$

et

$$w_N^* = \begin{pmatrix} 15 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -6 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & -3 \end{pmatrix}.$$

La solution de base réalisable relative à B est $(2,0,0,8)$, elle donne une valeur d'objectif égale à $Z(2,0,0,8) = -12$.

Itération 1

y_2	y_3		
$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	2	y_1
4	-1	8	y_4
12	-3	-12	

$$\lambda = \min\{\tfrac{8}{4}\} = 2$$

Itération 2

y_4	y_3		
$\frac{1}{8}$	$-\frac{5}{8}$	3	y_1
$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	2	y_2
-3	0	12	

Le vecteur ligne $w_N^* = (-3 \;\; 0)$ étant négatif, la solution associée $(3,2,0,0)$ est optimale pour (FS). Compte tenu du Théorème 2.1.1, on peut affirmer que $(3,2)$ est une solution optimale de ce (PL) et que la valeur maximale de Z sur le domaine réalisable est 12.

On avait montré à l'aide du graphique que ce problème admettait une infinité de solutions optimales. Ce résultat peut être retrouvé via le dernier tableau simplexe. En effet, on remarque sur ce tableau une composante w_s nulle. Le vecteur $\gamma = B^{-1}N_s$ est égal à $\gamma = -\binom{5/8}{1/4}$, qui est négatif. Donc, tout point de la forme $z_\lambda = \binom{B^{-1}b - \lambda\gamma}{\lambda e_s}$ est réalisable pour (FS) et ceci pour tout réel λ positif. Du fait que $w_s = 0$, la valeur de $Z(z_\lambda)$, qui est égale à $12 + \lambda w_s$, reste inchangée. Par suite, le point z_λ est optimal pour (FS) quelque soit le réel positif λ. En ce qui concerne le (PL) associé, nous allons utiliser comme d'habitude le Théorème 2.1.1. Si on classe les composantes de z_λ dans l'ordre y_i, $i = 1, \ldots, 4$, on obtient $z_\lambda = (3 + \lambda\frac{5}{8}, 2 + \lambda\frac{1}{4}, \lambda, 0)$. Par conséquent,

$$x_\lambda = (3 + \lambda\frac{5}{8}, 2 + \lambda\frac{1}{4}) = (3,2) + \lambda(\frac{5}{8}, \frac{1}{4})$$

est un point optimal pour (PL). Notons que $(\frac{5}{8}, \frac{1}{4})$ est un vecteur directeur de la droite (AB) (voir Figure 1.4). D'ailleurs, la demi-droite $[AB)$ coïncide avec l'ensemble des points $(3,2) + \lambda(\frac{5}{8}, \frac{1}{4})$ lorsque λ décrit $\mathbb{R}_+$.

Pour l'Exemple 3

$$\begin{cases} \max[Z(x_1, x_2) = x_1 + x_2] \\ \quad -x_1 + x_2 \quad \leq 1 \\ \quad -x_1 + 2x_2 \quad \leq 4 \\ x_1 \geq 0, \ x_2 \geq 0, \end{cases}$$

on a :

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ c^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } b = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Il est facile de vérifier que $B = I_2$ est une base réalisable.

Itération 1

y_1	y_2		
-1	1	1	y_3
-1	2	4	y_4
1	1	0	

Pour $w_s = 1$ écrit en gras, on a $\gamma = \binom{-1}{-1} \leq \binom{0}{0}$. Donc, d'après le Théorème 2.3.2, le problème vérifie :

$$\sup_{y \in \mathcal{Y}} Z(y) = +\infty.$$

Plus précisément, pour tout réel $\lambda \geq 0$, le point réalisable $y_\lambda = \binom{B^{-1}b - \lambda\gamma}{\lambda e_s}$ possède une valeur d'objectif égale à :

$$Z(y_\lambda) = 0 + \lambda w_s = \lambda, \text{ dont la limite en } +\infty \text{ vaut } +\infty.$$

Le point y_λ est égal $(\lambda, 0, 1+\lambda, 4+\lambda)$ et par conséquent $x_\lambda = (\lambda, 0)$ est un point réalisable du (PL) initial et ceci pour tout réel $\lambda \geq 0$. Noter que x_λ décrit le demi axe $[Ox_1)$ lorsque λ parcourt l'ensemble des réels positifs. D'après la Figure 1.5, tous ces points sont effectivement réalisables.

Tous les (PL) résolus jusqu'ici sont des formes canoniques puisque le domaine réalisable de chacun peut s'écrire sous la forme

$$\mathcal{R} = \{x \in \mathbb{R}^p \ / \ Ax \leq b \text{ et } x \geq 0_{\mathbb{R}^p}\}.$$

Comme conséquence immédiate du Théorème 2.1.1, on peut affirmer que si $\binom{v}{b-Av}$ est une solution d'une base réalisable de $\mathcal{Y}$, alors v est un sommet de $\mathcal{R}$ (voir Exercice 2.6.11). Essayons donc de voir le lien entre les différentes solutions de base réalisable parcourues par l'algorithme du simplexe et les sommets correspondants. Pour l'Exemple 1, à partir des quatre itérations effectuées, on voit que les sommets de $\mathcal{R}$ mis en jeu ont été parcourus dans l'ordre suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} (0,0) \\ Z(0,0)=0 \end{array} \right. \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} (0,3) \\ Z(0,3)=15 \end{array} \right. \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} (1,3) \\ Z(1,3)=19 \end{array} \right. \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} (3,2) \\ Z=22. \end{array} \right.$$

En se référant à la Figure 1.3, on remarque que deux sommets relatifs à deux itérations consécutives sont toujours **adjacents** : ils appartiennent à un même segment de droite frontière de $\mathcal{R}$. Cela s'explique algébriquement par le fait que les bases B et B' ne diffèrent que d'une seule colonne. En ce qui concerne l'Exemple 2, l'algorithme du simplexe a parcouru le sommet $(2,0)$ puis $(3,2)$. Quant à l'Exemple 3, une famille de points réalisables a été construite à partir du sommet $(0,0)$. Il s'agit de $x_\lambda = (\lambda, 0)$; $\lambda \geq 0$; qui vérifie $Z(x_\lambda) = \lambda \longrightarrow +\infty$.

Le mot simplexe tient son origine à une définition mathématique qui concerne des ensembles particuliers d'espace convexe. Rappelons tout d'abord que l'enveloppe convexe d'une partie U de $\mathbb{R}^n$ est le plus petit ensemble convexe contenant U. Lorsque U est un ensemble fini de points $x_0, \ldots, x_n$ de $\mathbb{R}^n$, on montre que l'enveloppe convexe de U, notée $K = \mathcal{C}(\{x_0, \ldots, x_n\})$, est l'ensemble des combinaisons convexes des points $x_0, \ldots, x_n$:

$$\mathcal{C}(\{x_0, \ldots, x_n\}) = \{x = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i x_i \ / \ \lambda_i \geq 0 \text{ et } \sum_{i=0}^{n} \lambda_i = 1\}.$$

Si les vecteurs $x_1 - x_0, \ldots, x_n - x_0$ sont linéairement indépendants, alors $\dim K = n$. Dans ce cas, l'enveloppe convexe K est appelée **n-simplexe**. D'ailleurs, les sommets de ce n-simplexe ne sont autres que les points $x_0, \ldots, x_n$. De ce fait, un 0-simplexe est un point, un 1-simplexe est un segment de droite, un 2-simplexe est un triangle et ainsi de suite.

2.4 Formules itératives

A chaque itération de l'algorithme du simplexe, on est contraint à calculer la matrice $B^{-1}N$ et le vecteur ligne $w_N^* = \pm[c_N^* - c_B^* B^{-1}N]$. Ces calculs exigent préalablement la détermination de la matrice inverse B^{-1}. Même avec des méthodes "sophistiquées" [17, 28], le calcul de l'inverse d'une matrice est relativement coûteux en temps de calcul. On ajoute à cela le calcul du produit matriciel $B^{-1}N$, $B^{-1}b$ et $c_B^* B^{-1}N$. Dans cette section, nous allons voir comment surmonter cette difficulté. Tout simplement, on évitera le calcul de B^{-1}. Les éléments d'un tableau vont être déterminés itérativement à partir des éléments du tableau précédent. Ceci est déjà le cas pour $y_B = B^{-1}b$ et la valeur de la fonction d'objectif Z, qui peuvent être calculés via les formules :

$$(y_B)_i \leftarrow \begin{cases} (y_B)_i - \lambda\gamma_i & \text{pour } i \neq r \\ \lambda & \text{pour } i = r \end{cases}, \text{ et } Z \leftarrow Z \pm \lambda w_s.$$

On verra qu'il est possible d'exprimer les éléments de $B'^{-1}N'$ et $w_{N'}$ respectivement en fonction des éléments de $B^{-1}N$ et w_N^*. Les formules régissant ces relations seront simples vu que la différence entre B et B' se situe au niveau d'une colonne et une seule.

2.4.1 Matrice du pivot

Posons $\beta = B^{-1}N$ la matrice réelle rectangulaire (m, p) avec $p = n-m$. Aussi, on pose $B = (B_1, \ldots, B_m)$ et $N = (N_1, \ldots, N_p)$ où B_i (*resp.* N_i) désigne la $i^{\text{ième}}$ colonne de B (*resp.* N). Supposons qu'à l'itération relative à la base B, on ait permuté le vecteur colonne B_r avec N_s. Au niveau du tableau, cela revient à écrire en gras l'élément (r, s) de la matrice β, que l'on note communément β_{rs}. Par conséquent, au cours de la prochaine itération, on aura $B' = (B_1, \ldots, B_{r-1}, N_s, B_{r+1}, \ldots, B_m)$ comme base réalisable et $N' = (N_1, \ldots, N_{s-1}, B_r, N_{s+1}, \ldots, N_p)$.

Théorème 2.4.1 *Les relations qui lient $\beta' = B'^{-1}N'$ avec $\beta = B^{-1}N$ sont données par :*

$$\beta'_{is} = \begin{cases} \frac{1}{\beta_{rs}} & si\ i = r \\ -\frac{\beta_{is}}{\beta_{rs}} & si\ i \neq r \end{cases} \quad et \quad \begin{cases} \beta'_{rj} = \frac{\beta_{rj}}{\beta_{rs}} & si\ j \neq s \\ \beta'_{ij} = \beta_{ij} - \frac{\beta_{is}\beta_{rj}}{\beta_{rs}} & si\ j \neq s\ et\ i \neq r. \end{cases}$$

Démonstration. De l'égalité $\beta = B^{-1}N$ en découle ce qui suit :

$$\begin{aligned}
\beta = B^{-1}N &\iff B\beta = N \\
&\iff N_j = \sum_{i=1}^{m} \beta_{ij} B_i, \text{ pour } j = 1, \ldots, p \\
&\iff \begin{cases} N_s = \sum_{i \neq r} \beta_{is} B_i + \boldsymbol{\beta_{rs}} B_r \\ \\ N_j = \sum_{i \neq r} \beta_{ij} B_i + \beta_{rj} B_r \quad \text{pour } j \neq s. \end{cases}
\end{aligned}$$

Par construction, l'élément β_{rs} (que l'on écrit par distinction en gras) est strictement positif. Il est par conséquent non nul. Alors, on obtient

$$B_r = \frac{1}{\beta_{rs}} N_s - \sum_{i \neq r} \frac{\beta_{is}}{\beta_{rs}} B_i.$$

En tenant compte de cette dernière égalité dans l'expression des vecteurs N_j pour $j \neq s$, on obtient :

$$\begin{aligned}
N_j &= \sum_{i \neq r} \beta_{ij} B_i + \beta_{rj} [\frac{1}{\beta_{rs}} N_s - \sum_{i \neq r} \frac{\beta_{is}}{\beta_{rs}} B_i] \\
&= \sum_{i \neq r} [\beta_{ij} - \frac{\beta_{is}\beta_{rj}}{\beta_{rs}}] B_i + \frac{\beta_{rj}}{\beta_{rs}} N_s.
\end{aligned}$$

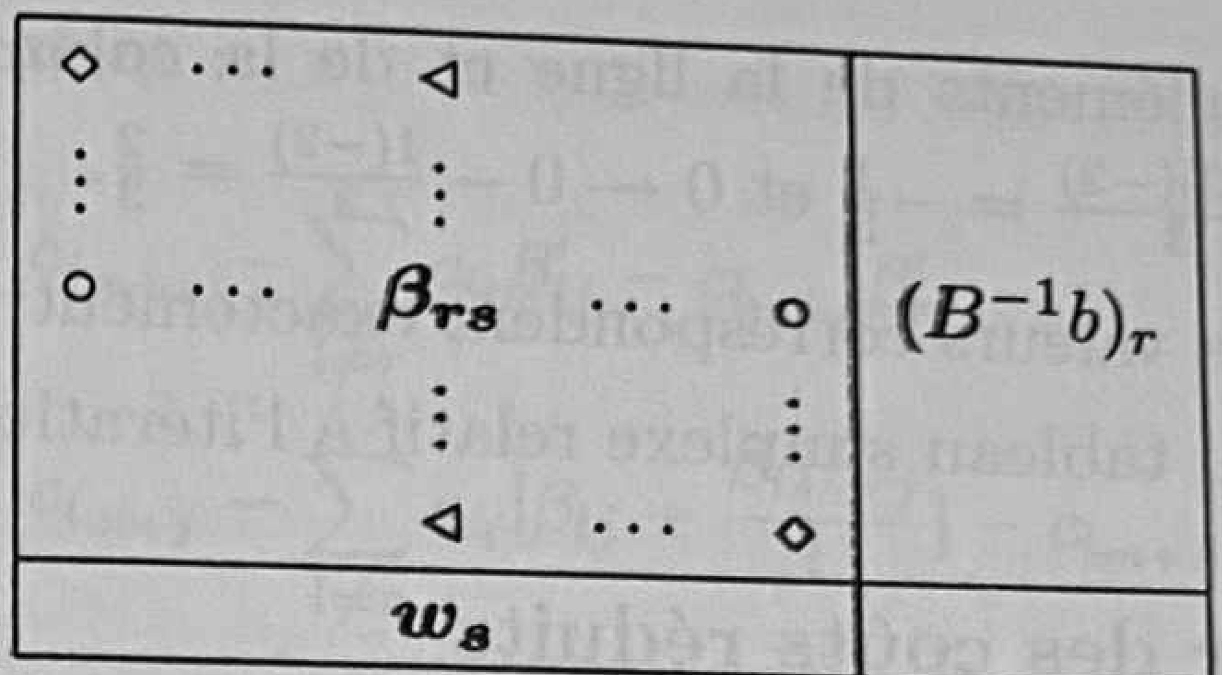
Par ailleurs, l'égalité $\beta' = B'^{-1}N'$ est équivalente à $B'\beta' = N'$. En rappelant que la colonne d'indice r de β' est N_s et que la $s^{\text{ième}}$ colonne de N' est B_r, l'égalité matricielle $B'\beta' = N'$ se traduit vectoriellement par :

$$\begin{cases} B_r = \sum_{i \neq r} \beta'_{is} B_i + \beta'_{rs} N_s \\ \\ N_j = \sum_{i \neq r} \beta'_{ij} B_i + \beta'_{rj} N_s \quad \text{pour } j \neq s. \end{cases}$$

Le résultat demandé sera obtenu par identification.

□

Afin de mieux visualiser les formules établies dans le Théorème 2.4.1, nous allons illustrer tout d'abord les éléments du tableau simplexe dans le schéma suivant. Le réel $\boldsymbol{\beta_{rs}}$ correspond à l'élément écrit en gras au niveau de la matrice $\beta = B^{-1}N$.



Ensuite, le tableau simplexe qui suit sera rempli moyennant des transformations qui peuvent être résumées en ces termes :

- au niveau de $\boldsymbol{\beta_{rs}}$, on aura $\frac{1}{\beta_{rs}}$.
- Tout élément $\triangleleft$ de la colonne relative à $\boldsymbol{\beta_{rs}}$ devient $-\frac{\triangleleft}{\beta_{rs}}$.
- Tout élément $\circ$ de la ligne relative à $\boldsymbol{\beta_{rs}}$ devient $\frac{\circ}{\beta_{rs}}$.
- Tout élément $\diamond$ en dehors de la ligne et de la colonne relative à $\boldsymbol{\beta_{rs}}$ sera transformé en $\diamond - \frac{\circ \cdot \triangleleft}{\beta_{rs}}$. Dans cette dernière expression, on tient à préciser que $\circ$ (*resp.* $\triangleleft$) est l'élément de la matrice $\beta = B^{-1}N$ qui appartient à la même colonne (*resp.* ligne) que $\diamond$ et la même ligne (*resp.* colonne) que $\boldsymbol{\beta_{rs}}$.

Les relations données dans le Théorème 2.4.1 sont identiques aux formules de Gauss-Jordan pour l'inversion d'une matrice [30]. Pour cette raison, l'élément β_{rs} s'appelle **pivot**, faisant allusion au pivot de Gauss. A chaque itération du simplexe, le pivot est donc l'intersection de la variable sortante avec la variable entrante. Noter également que toute ligne, en dehors de la ligne du pivot, qui possède un zéro sur la colonne du pivot reste inchangée ; idem pour les colonnes possédant un zéro sur la ligne du pivot.

Comme application, prenons le tableau de l'itération 3 de l'Exemple 1. On a :

$$B^{-1}N = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$ et l'élément en gras (qui est le pivot) est 3.

Donc, au niveau de l'itération 4,

le pivot se transforme en son inverse : $3 \leftarrow \frac{1}{3}$.

Les éléments de la $2^{\text{ième}}$ colonne (relative au pivot 3) -2 et 1 deviennent respectivement $\frac{2}{3}$ et $-\frac{1}{3}$.

L'élément -2 sur la même ligne que le pivot devient $-\frac{2}{3}$.

En dehors des éléments de la ligne et de la colonne du pivot, on a $1 \leftarrow 1 - \frac{(-2)(-2)}{3} = -\frac{1}{3}$ et $0 \leftarrow 0 - \frac{1(-2)}{3} = \frac{2}{3}$.

Il est clair que ces valeurs correspondent exactement aux éléments de la matrice $B^{-1}N$ du tableau simplexe relatif à l'itération 4.

2.4.2 Vecteur des coûts réduits

On garde ici le même pivot β_{rs}. Cela veut dire que le vecteur colonne B_r a été échangé par N_s et vice versa. Les formules établies précédemment pour β' vont conduire aux relations liant les composantes de $w^*_{N'}$ avec celles de w^*_N. Pour cela, on pose :

$$w^*_{N'} = (w'_1 \dots w'_p) \text{ et } w^*_N = (w_1 \quad \dots \quad w_p).$$

Théorème 2.4.2 *Les composantes de $w^*_{N'}$ sont données par*

$$w'_j = \begin{cases} -\frac{w_s}{\beta_{rs}} & \text{si } j = s \\ w_j - \frac{w_s \beta_{rj}}{\beta_{rs}} & \text{si } j \neq s. \end{cases}$$

Démonstration. On note les composantes de c_B par $c_{i_1}, \dots, c_{i_m}$, et celles de c_N par $c_{i_{m+1}}, \dots, c_{i_{m+p}}$. Autrement dit, les variables de base sont $y_{i_1}, \dots, y_{i_m}$ et $y_{i_{m+1}}, \dots, y_{i_{m+p}}$ sont les variables hors base. En raison de la permutation $B_r \leftrightarrow N_s$, on aura

$$c^*_{B'} = (\ c_{i_1} \quad \dots \quad c_{i_{r-1}} \quad c_{i_{m+s}} \quad c_{i_{r+1}} \quad \dots \quad c_{i_m}\ )$$

et

$$c^*_{N'} = (\ c_{i_{m+1}} \quad \dots \quad c_{i_{m+s-1}} \quad c_{i_r} \quad c_{i_{m+s+1}} \quad \dots \quad c_{i_{m+p}}\ ).$$

A un signe près, la définition du vecteur des coûts réduits est la même que ce soit (FS) est de type “max” ou “min”. Sans perte de généralité, on peut supposer que le problème (FS) est de type maximisation. Ainsi, le vecteur des coûts réduits sera égal à $w^*_{N'} = c^*_{N'} - c^*_{B'} B'^{-1} N'$. D'après le Théorème 2.4.1, il en découle les résultats suivants.

Pour $j \neq s$, on obtient :

$$\begin{aligned} w'_j &= c_{i_{m+j}} - \sum_{l \neq r} c_{i_l} \beta'_{lj} - c_{i_{m+s}} \beta'_{rj} \\ &= c_{i_{m+j}} - \sum_{l \neq r} c_{i_l} [\beta_{lj} - \frac{\beta_{ls}\beta_{rj}}{\beta_{rs}}] - c_{i_{m+s}} \frac{\beta_{rj}}{\beta_{rs}} \\ &= c_{i_{m+j}} - \sum_{l \neq r} c_{i_l} \beta_{lj} - \frac{\beta_{rj}}{\beta_{rs}} [c_{i_{m+s}} - \sum_{l \neq r} c_{i_l} \beta_{ls}]. \end{aligned}$$

En ajoutant et retranchant le terme $c_{i_r}\beta_{rj}$ dans l'expression de w'_j relative à la dernière égalité, on trouve

$$w'_j = [c_{i_{m+j}} - \sum_{l=1}^{m} c_{i_l} \beta_{lj}] - \frac{\beta_{rj}}{\beta_{rs}} [c_{i_{m+s}} - \sum_{l=1}^{m} c_{i_l} \beta_{ls}].$$

D'autre part, la relation vectorielle $w_N^* = c_N^* - c_B^* \beta$ se traduit par $w_h = c_{i_{m+h}} - \sum_{l=1}^{m} c_{i_l} \beta_{lh}$ pour tout indice h. Donc, les deux termes entre crochets figurant dans la dernière expression de w'_j peuvent être respectivement remplacés par w_j et w_s. Ainsi, on obtient

$$w'_j = w_j - w_s \frac{\beta_{rj}}{\beta_{rs}}, \text{ pour } j \neq s.$$

Pour $j = s$, on a :

$$\begin{aligned} w'_s &= c_{i_r} - \sum_{l \neq r} c_{i_l} \beta'_{ls} - c_{i_{m+s}} \beta'_{rs} \\ &= c_{i_r} + \sum_{l \neq r} c_{i_l} \frac{\beta_{ls}}{\beta_{rs}} - \frac{c_{i_{m+s}}}{\beta_{rs}}, \text{ d'après le Théorème 2.4.1} \\ &= c_{i_r} - \frac{1}{\beta_{rs}} [c_{i_{m+s}} - \sum_{l \neq r} c_{i_l} \beta_{ls}] \\ &= -\frac{1}{\beta_{rs}} [c_{i_{m+s}} - \sum_{l=1}^{m} c_{i_l} \beta_{ls}] \\ &= -\frac{w_s}{\beta_{rs}}, \text{ car } c_{i_{m+s}} - \sum_{l=1}^{m} c_{i_l} \beta_{ls} = w_s. \end{aligned}$$

La démonstration de ce théorème est alors achevée □

D'ores et déjà, on peut observer que les relation liant $w_{N'}^*$ à w_N^* sont les mêmes que les relations entre une ligne $\beta'_{i\bullet}$ et une ligne en dehors de la

ligne du pivot $\beta_{i\bullet}$. Le terme w_s, qu'on a convenu d'écrire en gras, se situe sur la même colonne du pivot. Il est remplacé par $-\frac{w_s}{\beta_{rs}}$. Les opérations qu'il faut appliquer sur w_j, $j \neq k$, en vue d'obtenir w'_j sont identiques à celles effectuées sur les termes de symbole $\diamond$ dans le schéma du paragraphe précédent. A titre indicatif, le vecteur w^*_N relatif à l'itération 3 de l'Exemple 3 vaut $(-4\ \ 3)$. L'élément en gras, qui est $w_s = 3$, devient $-\frac{3}{3} = -1$ étant donné que le pivot vaut $\beta_{rs} = 3$. Par contre, la valeur -4 sera substituée par $-4 - \frac{3(-2)}{3} = -2$.

Il est utile de remarquer que la relation liant le vecteur $w^*_{N'}$ à w^*_N est identique à celle qui régit une ligne de β' distincte de la ligne du pivot. En effet, l'élément w'_s qui se situe sur la colonne du pivot β_{rs} se calcule de la même façon que n'importe quel élément symbolisé par $\triangleleft$. La formule régissant les autres composantes w'_j coïncide parfaitement avec la transformation subie par un élément de type $\diamond$. En ce qui concerne le vecteur $B'^{-1}b$, il a été indiqué d'avance qu'il peut être déterminé par les relations

$$(B'^{-1}b)_i = \begin{cases} (B^{-1}b)_i - \lambda\beta_{is} & \text{pour } i \neq r \\ \lambda & \text{pour } i = r. \end{cases}$$

Si on remplace λ par sa valeur $(B^{-1}b)_r/\beta_{rs}$, on obtient les mêmes formules qui régissent une colonne de β en dehors de la colonne du pivot. Maintenant, l'élément en bas à droite du tableau simplexe, à savoir Z, se calcule itérativement via la relation $Z \leftarrow Z + \lambda w_s$ ou $Z \leftarrow Z - \lambda w_s$ selon que le problème étudié soit de type maximisation ou minimisation. En tenant compte de l'expression de λ, il est facile de constater que la formule $Z \leftarrow Z - \lambda w_s$ s'identifie à la formule relative à un élément de symbole "$\diamond$". Afin de garder les mêmes formules, il est souhaitable de remplacer Z par $-Z$ lorsqu'il s'agit d'un problème de type maximisation. Au niveau de l'implémentation sur machine, il serait commode de définir une matrice, que l'on note H, qui contient les éléments β, $B^{-1}b$, w^*_N et Z :

$$\begin{cases} H(1:m, 1:p) = \beta = B^{-1}N, \text{ avec } p = n - m \\ H(1:m, p+1) = B^{-1}b \\ H(m+1, 1:p) = w^*_N = \begin{cases} c^*_N - c^*_B B^{-1}N & \text{si "max"} \\ c^*_B B^{-1}N - c^*_N & \text{si "min"} \end{cases} \\ H(m+1, p+1) = \begin{cases} -Z(y^{(0)}) & \text{si "max"} \\ +Z(y^{(0)}) & \text{si "min".} \end{cases} \end{cases}$$

La matrice H est de taille $(m+1, p+1)$. D'une itération à une autre, elle est calculée itérativement de la même façon que l'on détermine les éléments symbolisés par "$\diamond$", "$\triangleleft$" et "$\circ$". Afin de balayer tous les paramètres du tableau simplexe, on ajoute à H deux vecteurs entiers, notés *base* et *hbase* et de taille respective m et p. Pour chaque coordonnée i, $base(i)$ fournit l'indice de la $i^{\text{ième}}$ variable de base du tableau simplexe en cours. De même, $hbase(j)$ correspond à l'indice de la $j^{\text{ième}}$ variable hors base. La mise en œuvre des résultats de ce paragraphe dans l'algorithme du simplexe aboutit à une formulation plus simplifiée au niveau de l'implémentation sur machine. Ici, on suppose que l'on prend systématiquement l'élément $w_s > 0$ le plus élevé. Naturellement, le plus grand parmi les composantes strictement positives est le maximum sur toutes les composantes de w_N^*.

Algorithm 2 Algorithme du simplexe standard

Require: base réalisable

Initialiser H, $base$ et $hbase$

Calculer $ws = \max[H(m+1, 1:p)]$

while $ws > 0$ **do**

déterminer l'indice s pour lequel le maximum ws est atteint

if $H(1:m, s) \leq 0_{\mathbb{R}^m}$ **then**

optimum infini /* $\begin{cases} \sup_{y \in \mathcal{Y}} Z(y) = +\infty & \text{si "max"} \\ \inf_{y \in \mathcal{Y}} Z(y) = -\infty & \text{si "min"} \end{cases}$ */

exit

else

calculer $\lambda = \min\{\frac{H(i,p+1)}{H(i,s)} ;\ \text{pour } i = 1, \ldots, m \ / \ H(i,s) > 0\}$

déterminer l'indice r pour lequel λ est atteint

end if

$base(r) \leftrightarrow hbase(s)$

$piv = H(r, s)$

$H(r, s) \leftarrow \frac{1}{piv}$

$H(r, j) \leftarrow \frac{H(r,j)}{piv}$, pour $j = 1, \ldots, p+1$ et $j \neq s$

$H(i, j) \leftarrow H(i, j) - H(r, j) * H(i, s)$, pour $i \neq r$ et $j \neq s$

$H(i, s) \leftarrow -\frac{H(i,s)}{piv}$, pour $i = 1, \ldots, m+1$ et $i \neq r$

Calculer $ws = \max[H(m+1, 1:p)]$

end while

Optimum vaut $Z = \begin{cases} -H(m+1, p+1) & \text{si "max"} \\ H(m+1, p+1) & \text{si "min"} \end{cases}$

Une solution optimale, que l'on note $opty$, est donnée par :

$$\begin{cases} opty(base(1:m)) = H(1:m, p+1) \\ opty(hbase(1:p)) = 0. \end{cases}$$

2.5 Application à un problème de portefeuille

On considère le problème du portefeuille formulé dans la Référence [22]. Nous allons en premier lieu modéliser le problème en un programme linéaire. Ensuite, la résolution sera faite à l'aide de l'algorithme du simplexe. Bien entendu, on tiendra compte des résultats des deux théorèmes précédents.

Exemple 8 Il s'agit d'une personne qui possède, au début d'une année, un portefeuille composé d'un certain nombre d'actions partagées entre trois

différentes banques 1, 2 et 3. Le tableau suivant donne le nombre d'actions dont dispose cette personne dans chaque banque et le prix en Dinars Tunisien (DT) d'une action au début de l'année. Suite à une étude de marché, le bénéfice annuel par action et la valeur de chaque action à la fin de l'année courante ont pu être estimés.

	Banque 1	Banque 2	Banque 3
Nombre d'actions	75	1000	25
Prix unitaire (en DT)	20	2	100
Bénéfice annuel (en DT)	5	0	2
Valeur unitaire (en DT)	18	3	102

Les banques exigent à chaque client d'ajuster (augmenter ou diminuer) le nombre de leurs actions une seule fois par an et ce au début de chaque année. La personne en question veut ajuster son portefeuille tout en obéissant aux restrictions suivantes :

après ajustement, la valeur du portefeuille doit rester la même.

Pour tenir compte de l'inflation, la valeur du portefeuille à la fin de l'année doit augmenter d'au moins 5% de sa valeur au début de l'année.

Afin d'éviter les risques du marché, le montant global des actions dans chaque banque et après ajustement doit être supérieur au quart de la valeur totale du portefeuille.

Sans tenir compte du gain dû à la variation de la valeur d'une action entre le début et la fin d'année, la personne en question veut savoir le meilleur ajustement pour un profit maximal.

On désigne par $|x_i|$ le nombre d'actions achetées (si $x_i \geq 0$) ou vendues (si $x_i < 0$) à la banque i. Compte tenu de l'hypothèse faite à la fin de l'exercice, le bénéfice dû à cet ajustement du portefeuille vaut

$$Z(x_1, x_2, x_3) = 5(75 + x_1) + 0(1000 + x_2) + 2(25 + x_3) = 5x_1 + 2x_3 + 425.$$

La valeur du portefeuille au début de l'année est

$$20 \times 75 + 2 \times 1000 + 100 \times 25 = 6000.$$

La première contrainte qui consiste à garder la même valeur du portefeuille après ajustement se traduit par :

$$20(75 + x_1) + 2(1000 + x_2) + 100(25 + x_3) = 6000 \Longleftrightarrow 10x_1 + x_2 + 50x_3 = 0$$

La deuxième contrainte sur l'inflation donne :

$$18(75+x_1)+3(1000+x_2)+102(25+x_3) \geq 6000+\frac{5}{100}6000$$
$$\iff 6x_1+x_2+34x_3 \geq -200.$$

Quant à la troisième restriction, elle s'exprime par :

$$\left\{\begin{array}{l} 20(75+x_1) \geq \frac{6000}{4} \\ 2(1000+x_2) \geq \frac{6000}{4} \\ 100(25+x_3) \geq \frac{6000}{4} \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq -250 \\ x_3 \geq -10. \end{array}\right.$$

Avec ces dernières contraintes sur les variables x_i, on note que le nombre d'actions dans chaque banque reste positif. En conclusion, le problème de maximisation du gain se traduit mathématiquement par le (PL) :

$$\left\{\begin{array}{l} \max[Z(x_1,x_2,x_3)=5x_1+2x_3+425] \\ 10x_1+x_2+50x_3 \quad =0 \\ 6x_1+x_2+34x_3 \quad \geq -200 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq -250,\ x_3 \geq -10. \end{array}\right.$$

Remarquer que la fonction à maximiser est affine et non linéaire en raison de la constante 425. Cela ne pose aucun problème puisque, pour toute constante réelle K,

$$\max_{x\in\mathcal{R}}[Z(x)+K]=K+\max_{x\in\mathcal{R}}Z(x), \text{ pour tout sous ensemble } \mathcal{R} \text{ de } \mathbb{R}^n.$$

Par ailleurs, la mise sous forme standard nécessite entre autres le changement de variables $y_1=x_1$, $y_2=x_2+250$ et $y_3=x_3+10$ afin d'obtenir les contraintes de positivité. Ensuite, il faut retrancher une variable positive y_4 à la deuxième contrainte. En résumé, la forme standard de ce problème s'écrit :

$$\left\{\begin{array}{l} \max[Z(y)=5y_1+2y_3+405] \\ 10y_1+y_2+50y_3 \quad =750 \\ 6y_1+y_2+34y_3-y_4 \quad =390 \\ y=(y_1,y_2,y_3,y_4) \geq 0_{\mathbb{R}^4}. \end{array}\right.$$

Maintenant, il va falloir chercher une base réalisable. On vérifie facilement que $\{y_2,y_4\}$ est un système de variables de base réalisable, puisque la matrice B associée vérifie :

$$B=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \Longrightarrow B^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$
$$\Longrightarrow B^{-1}b=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 750 \\ 390 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 750 \\ 360 \end{pmatrix}.$$

D'où

$$B^{-1}N = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 & 50 \\ 6 & 34 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 50 \\ 4 & 16 \end{pmatrix}$$

et

$$w_N^* = c_N^* = (\ 5 \quad 2\ ), \text{ car } c_B^* = 0_B^*.$$

Itération 1

y_1	y_3		
10	50	750	y_2
4	16	360	y_4
5	2	405	

$$\lambda = \min\{\tfrac{750}{10} = 75, \tfrac{360}{4} = 90\} = 75$$

Itération 2

y_2	y_3		
$\frac{1}{10}$	5	75	y_1
$-\frac{2}{5}$	-4	60	y_4
$-\frac{1}{2}$	-23	780	

Le vecteur $w_N^* = (-\frac{1}{2} \quad -23)$ étant négatif, le profit maximal est atteint et il vaut $Z(75, 0, 0, 60) = 780$. En se référant aux changements de variables, on aura $(x_1, x_2, x_3) = (75, -250, -10)$ comme point optimal du problème de portefeuille. En conclusion, on peut affirmer que la stratégie optimale d'ajustement consiste à acheter 75 actions de la banque 1, et à vendre 250 et 10 actions respectivement aux banques 2 et 3. Noter que si la personne n'effectue aucun ajustement, elle est assurée de gagner 425DT alors qu'avec cet ajustement optimal, elle gagne 780DT. En ce qui concerne le dernier tableau qui correspond à la solution optimale, on peut outre passer le calcul de la matrice $B^{-1}N$ puisque cette information n'intéresse en rien la conclusion sur la stratégie optimale. D'une façon générale, lors de l'application manuelle de l'algorithme du simplexe, il est préférable de calculer en premier lieu les vecteurs w_N^* et $B^{-1}b$. Si $w_N^* \leq 0_N^*$, il est inutile, dans ce cas, de calculer la matrice $B^{-1}N$.

2.6 Exercices

Exercice 2.6.1

On considère le (PL) suivant :

$$\begin{cases} \max[Z(x) = x_1 + 2x_2 - x_3] \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 \quad = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 \quad \geq 1 \\ x_1 + 3x_2 - 3x_3 \quad \leq 1 \\ x = (x_1, x_2, x_3) \geq 0_{\mathbb{R}^3}. \end{cases}$$

1) *Ecrire ce (PL) sous forme canonique et sous forme standard.*

2) *Même question que précédemment en supprimant la contrainte de positivité* $x_2 \geq 0$.

Exercice 2.6.2

On considère le (PL) suivant :

$$\begin{cases} \max[Z(x) = x_1 + x_2 + 4x_3] \\ x_1 + 4x_3 \quad \leq 4 \\ x_2 + 4x_3 \quad \leq 4 \\ x = (x_1, x_2, x_3) \geq 0_{\mathbb{R}^3}. \end{cases}$$

1) *Montrer que* $x^{(0)} = (4, 4, 0)$ *est un sommet du domaine réalisable.*

2) *Ecrire ce (PL) sous forme standard, puis donner la solution de base réalisable* $y^{(0)}$ *associée à* $x^{(0)}$.

3) *Résoudre ce (PL) par la méthode du simplexe en prenant comme point initial* $y^{(0)}$.

Exercice 2.6.3

On considère la forme canonique suivante :

$$(FC) \begin{cases} \max[Z(x) = 3x_1 + 2x_2 + 5x_3] \\ x_1 + 2x_2 + x_3 \quad \leq 430 \\ 3x_1 + 2x_3 \quad \leq 460 \\ x_1 + 4x_2 \quad \leq 420 \\ x = (x_1, x_2, x_3) \geq 0_{\mathbb{R}^3}. \end{cases}$$

1) *Ecrire cette (FC) sous forme standard (FS), puis montrer que le point*

$$y^{(0)} = (0, 0, 230, 200, 0, 420)$$

est une solution de base réalisable.

2) *Déterminer le sommet $x^{(0)}$ de (FC) relatif à $y^{(0)}$.*

3) *Résoudre ce problème par la méthode du simplexe en prenant comme point initial $y^{(0)}$.*

Exercice 2.6.4

Au cours de la résolution d'une forme standard de type minimisation par le simplexe, on suppose que l'on ait trouvé le tableau simplexe suivant :

y_2	y_3	y_5		
$\frac{2}{3}$	0	$\frac{4}{3}$	4	y_1
$-\frac{7}{3}$	3	$-\frac{2}{3}$	2	y_4
$-\frac{2}{3}$	-2	$\frac{2}{3}$	2	y_6
$\frac{8}{3}$	-11	$\frac{4}{3}$	8	

1) *La résolution du problème est-elle achevée ? Justifier votre réponse.*

2) *Déterminer la forme standard (FS1) relative à ce tableau.*

3) *On suppose que la base en cours B vérifie*

$$B^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ et que } c_B^* = \begin{pmatrix} \alpha & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

a - *Déterminer α et trouver la forme standard initiale (FS2).*

b - *Montrer que les deux problèmes (FS1) et (FS2) sont équivalents.*

c - *Résoudre ce problème par le simplexe.*

d - *Ecrire la forme standard associée au dernier tableau simplexe. Que peut-on conclure ?*

Exercice 2.6.5

Au cours de la résolution d'une forme standard de type maximisation par le simplexe, on suppose que l'on ait trouvé le tableau simplexe ci-après.

y_1	y_3		
-1	1	2	y_2
3	-4	6	y_4
7	-4	30	y_5
0	1	10	y_6
3	-1	0	y_7
4	-1	2	

La résolution étant achevée, le tableau final se présente comme suit :

y_5	y_6		
			y_1
			y_2
			y_3
			y_4
			y_7

Sans effectuer les itérations intermédiaires, compléter le dernier tableau simplexe.

Exercice 2.6.6

Considérons le système d'inéquations ci-dessous :

$$(S)\begin{cases} x_1 + x_2 & \leq 2 \\ x_2 + x_3 & \leq 3 \\ x_1 + x_3 & \leq 4 \\ x_1,\ x_2 \text{ et } x_3 & \geq 0. \end{cases}$$

Soit Z la fonction définie par $Z(x_1, x_2, x_3) = 3x_1 + x_2 + 2x_3$.

1) *Trouver le maximum de Z sous les contraintes (S) par la méthode du simplexe.*

2) *Soit (S') le système défini à partir de (S) auquel on ajoute la contrainte*

$$x_1 + x_2 + x_3 \geq 1.$$

a - *Sans simplexe, donner le maximum de Z sous les contraintes (S').*

b - *A partir de la base optimale trouvée dans la première question, déterminer la base optimale du problème lié à (S').*

3) *Chercher le minimum de Z sous les contraintes (S').*

4) *On propose maintenant de maximiser la fonction*

$$\psi(x_1, x_2, x_3) = x_1 - x_2$$

sous les contraintes (S). Notons par B la base optimale trouvée dans la première question. Par quelle base, B ou I_3, est-il préférable d'initialiser le simplexe pour résoudre ce problème ? Justifier votre réponse. Donner alors la solution de ce (PL).

Exercice 2.6.7

On considère le problème suivant :

$$(\mathcal{P})\begin{cases} \max[Z(x) = -3x_1 + x_2] \\ x_1 + x_2 \geq 3 \\ 2x_1 - x_2 \geq 3 \\ x_1 + 2x_2 \leq 14 \\ x = (x_1, x_2) \geq 0_{\mathbb{R}^2}. \end{cases}$$

1) *Résoudre le problème* $(\mathcal{P})$

a - *par la méthode graphique,*

b - *par la méthode des sommets.*

2) *Modifier le deuxième coefficient* $c_2 = 1$ *de la fonction économique* Z *de sorte que le problème* $(\mathcal{P})$ *modifié admette une infinité de solutions optimales.*

3) *On considère maintenant le problème suivant :*

$$(\mathcal{D})\begin{cases} \min[\psi(v) = -3v_1 - 3v_2 + 14v_3] \\ -v_1 - 2v_2 + v_3 \geq -3 \\ -v_1 + v_2 + 2v_3 \geq 1 \\ v = (v_1, v_2, v_3) \geq 0_{\mathbb{R}^3}. \end{cases}$$

a - *Montrer que toute solution réalisable* x *de* $(\mathcal{P})$ *et toute solution réalisable* v *de* $(\mathcal{D})$*, on a* $Z(x) \leq \psi(v)$*.*

b - *Montrer que* $v_0 = (7, 0, 4)$ *est un sommet pour* $(\mathcal{D})$*.*

c - *Ecrire* $(\mathcal{D})$ *sous forme standard, puis déterminer la base réalisable* B_0 *associée à* v_0*.*

d - *La base* B_0 *est-elle optimale ? Justifier votre réponse.*

e - *Résoudre* $(\mathcal{D})$ *par le simplexe, puis comparer la valeur optimale de* $(\mathcal{P})$ *avec celle de* $(\mathcal{D})$*.*

Exercice 2.6.8

On considère un programme linéaire (FS) écrit sous forme standard. Soit B *une base réalisable et* $y^{(0)} = \binom{B^{-1}b}{0_N}$ *la solution de base associée.*

1) *Montrer que toute solution réalisable* $y = \binom{y_B}{y_N}$ *vérifie*

$$Z(y) = Z(y^{(0)}) \pm w_N^* y_N, \quad \text{où} \quad w_N^* = \pm[c_N^* - c_B^* B^{-1} N],$$

selon que (FS) soit de type maximisation ou minimisation.

2) *Montrer que si* $w_N^* < 0_N^*$ *alors* $y^{(0)}$ *est l'unique solution optimale de (FS).*

3) *Montrer que si $y^{(1)}$ et $y^{(2)}$ sont deux solutions optimales de (FS) alors toute combinaison convexe de $y^{(1)}$ et $y^{(2)}$ est optimale.*

4) *On suppose que la base B vérifie $w_N^* \leq 0_N^*$.*

a - *Montrer que s'il existe une composante w_s de w_N^* nulle alors (FS) admet au moins deux bases optimales différentes.*

b - *Montrer que s'il existe une composante w_s de w_N^* nulle et B est non dégénérée alors (FS) admet une infinité de solutions optimales.*

c - *Peut-on avoir $w_s = 0$ avec une solution optimale unique pour (FS) ? Si c'est le cas, donner un exemple.*

Exercice 2.6.9

Soit B une matrice d'ordre m inversible.

1) *Pour tout vecteur $z = (z_1, \ldots, z_m)$, exprimer Bz en fonction des réels z_i et des colonnes B_i. Ici, B_i désigne la $i^{\text{ième}}$ colonne de la matrice B.*

2) *Considérons un vecteur $b \in \mathbb{R}^m$ tel que $B^{-1}b \geq 0_{\mathbb{R}^m}$ et un vecteur $N_s \in \mathbb{R}^m$ tel que $\gamma = B^{-1}N_s \not\leq 0_{\mathbb{R}^m}$. Soit le paramètre*

$$\lambda = \min\{\frac{(B^{-1}b)_i}{\gamma_i} \text{ ; pour } i = 1, \ldots, m \ / \ \gamma_i > 0\}.$$

Notons par r le plus petit indice pour lequel le minimum λ est atteint et par B' la matrice obtenue à partir de B en remplaçant B_r par N_s.

a - *Montrer que B' est inversible.*

b - *Montrer que $z' \in \mathbb{R}^m$ défini par*

$$z'_i = \begin{cases} \lambda & \text{si } i = r \\ (B^{-1}b)_i - \lambda\gamma_i & \text{si } i \neq r \end{cases}$$

est la solution du système linéaire $B'z' = b$.

c - *Montrer que $z' \geq 0_{\mathbb{R}^m}$.*

Exercice 2.6.10

L'objectif de cet exercice est de prouver que tout domaine réalisable non vide d'une forme standard admet une solution de base réalisable.

Soit M une matrice (m, n) de rang m et $b \in \mathbb{R}^m$. On suppose que l'ensemble

$$\mathcal{Y} = \{y \in \mathbb{R}^n \ / \ My = b \text{ et } y \geq 0_{\mathbb{R}^n}\}$$

est non vide et on fixe un point $x \in \mathcal{Y}$. Soit $p = Card(I)$ avec

$$I = \{i \in \{1, \ldots, n\} \ / \ x_i > 0\}.$$

1) *Dans cette question, on suppose que la famille $(M_i)_{i\in I}$ est libre.*

a - *Comparer et p et m.*

b - *En déduire qu'il existe une base réalisable et déterminer la solution de base associée.*

2) *On suppose maintenant que la famille $(M_i)_{i\in I}$ est liée.*

a - *Montrer qu'il existe p réels y_i ; $i \in I$; de sorte que l'ensemble $J = \{i \in I \ / \ y_i > 0\}$ soit non vide et $\sum_{i\in I} y_i M_i = 0$.*

b - *En considérant le paramètre $\lambda = \min\{\frac{x_i}{y_i} \ / \ i \in J\}$, déterminer une solution réalisable, différente de x, qui admet au plus $(p-1)$ composantes strictement positives.*

3) *En déduire le résultat voulu.*

Exercice 2.6.11

On considère un (PL) écrit sous forme canonique :

$$(FC) \begin{cases} \max(\text{ou } \min)[Z(x) = c^* x] \\ Ax \leq b \\ x \geq 0_{\mathbb{R}^p}. \end{cases}$$

Ici, A représente une matrice (m, p), c un vecteur de $\mathbb{R}^p$ et b un vecteur de $\mathbb{R}^m$.

1) *Ecrire (FC) sous forme standard (FS).*

2) *On note par $\mathcal{R}$ le domaine réalisable de (FC) et par $\mathcal{Y}$ celui de (FS).*

a - *Montrer le résultat suivant :*

$$v \text{ est un sommet de } \mathcal{R}$$
$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} v \\ b - Av \end{pmatrix} \text{ est une solution de base réalisable de } \mathcal{Y}.$$

b - *Décrire la technique qui permet de déterminer, à partir d'une solution de base réalisable $\binom{v}{b-Av}$ de $\mathcal{Y}$, les hyperplans frontières qui caratérisent le sommet v de $\mathcal{R}$.*

c - *Inversement, décrire la technique qui permet de déterminer, à partir d'un sommet v de $\mathcal{R}$, les coordonnées de base de la solution réalisable $\binom{v}{b-Av}$ correspondante. Pour ces deux descriptions, discuter séparément le cas non dégénéré et la cas dégénéré.*

3) **a -** *Comparer le nombre de sommets de $\mathcal{R}$ avec le nombre de solutions de base réalisable de $\mathcal{Y}$.*

b - *Le nombre de sommets de $\mathcal{R}$ coïncide-t-il avec le nombre de bases réalisables de $\mathcal{Y}$? Justifier votre réponse.*

Chapitre 3

Recherche d'une base réalisable initiale

Une base réalisable constitue une donnée principale pour le démarrage de l'algorithme du simplexe. Pour une (FC), on a vu que les contraintes s'écrivent sous la forme $Ax \leq b$ et $x \geq 0_{\mathbb{R}^p}$ et que les contraintes de la forme standard associée sont $My = b$ et $y \geq 0_{\mathbb{R}^{p+m}}$ avec $M = [A\ I_m]$. Par conséquent, si $b \geq 0_{\mathbb{R}^m}$, la matrice $B = I_m$ est une base réalisable étant donné que $B^{-1}b = b \geq 0_{\mathbb{R}^m}$. Autrement dit, les variables d'écart constituent un système de variables de base réalisable dans le cas où $b \geq 0_{\mathbb{R}^m}$. Dans le cas contraire (*i. e.* $b \ngeq 0_{\mathbb{R}^m}$) ou dans le cas où le (PL) n'est pas écrit sous forme canonique, il est souvent difficile de détecter à première vue une base réalisable.

3.1 Méthode des deux phases

Considérons un programme linéaire écrit sous forme standard :

$$\text{(FS)} \begin{cases} \max(\text{ou } \min)[Z(y) = c^* y] \\ My = b \\ y \geq 0_{\mathbb{R}^n}, \end{cases}$$

où $c \in \mathbb{R}^n$, M matrice (m, n) et $b \in \mathbb{R}^m$ sont préalablement fixés. Sans perte de généralité, on suppose que $b \geq 0_{\mathbb{R}^m}$. Sinon, on multiplie toute équation relative à chaque composante $b_i < 0$ par (-1). Parmi les colonnes de la matrice rectangulaire M, on extrait tous les vecteurs qui correspondent à un élément de la base canonique de $\mathbb{R}^m$. Si le rassemblement de ces vecteurs conduit à obtenir la matrice identité I_m, alors

$B = I_m$ est un base réalisable. Dans le cas où il manque certains vecteurs e_i, $i \in I$, pour construire I_m, on les ajoute à M. Ainsi, on obtient une matrice M' qui possède plus de colonnes que M et qui englobe I_m. Au niveau des contraintes, cela revient à ajouter des variables positives x_{a_i} à toutes les équations $i \in I$. Ces variables s'appellent d'ailleurs **variables artificielles**. De cette façon, le domaine réalisable

$$\mathcal{Y} = \{y \in \mathbb{R}^n \ / \ My = b \text{ et } y \geq 0_{\mathbb{R}^n}\}$$

devient

$$\mathcal{Y}' = \{y' \in \mathbb{R}^{n+q} \ / \ M'y' = b \text{ et } y' \geq 0_{\mathbb{R}^{n+q}}\},$$

où q est le cardinal de I. Le vecteur y' est formé par les variables y_i, $i = 1, \ldots, n$ et les variables artificielles x_{a_i}, $i \in I$. L'idée de base de cette méthode s'articule sur une constatation évidente :

$$\binom{y}{0_{\mathbb{R}^q}} \in \mathcal{Y}' \text{ (toutes les variables artificielles sont nulles)} \Longrightarrow y \in \mathcal{Y}.$$

L'écriture de y' sous la forme $\binom{y}{x_a}$; $x_a = (x_{a_i},\ i \in I)$; suppose que la matrice M' est classée selon l'ordre M et puis $L = (e_i,\ i \in I)$; (*i. e.* $M' = [M \quad L]$). Donc, pour trouver un point réalisable de $\mathcal{Y}$, il suffit de chercher un point réalisable de $\mathcal{Y}'$ dont les composantes relatives aux variables artificielles sont nulles. Afin d'atteindre cet objectif, on considère le problème auxiliaire suivant :

$$\begin{cases} \max[T(y') = -\sum_{i \in I} x_{a_i}] \\ y' \in \mathcal{Y}' \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} \min[T(y') = \sum_{i \in I} x_{a_i}] \\ y' \in \mathcal{Y}' \end{cases}$$

selon la nature du problème (FS) ("max" ou "min"). Comme les variables x_{a_i}, $i \in I$, sont positives, l'optimum de T sur $\mathcal{Y}'$ est nécessairement nul. Donc, l'optimum sera atteint en point $y' \in \mathcal{Y}'$ de la forme $y' = \binom{y}{0_{\mathbb{R}^q}}$. Puisque $rang(M) = rang(M') = m$, la base associée à y' est une base réalisable du problème de départ (FS). Noter aussi que ce problème auxiliaire admet une base réalisable évidente qui est $B = I_m$.

Exemple 9 On propose de résoudre le problème d'optimisation linéaire

suivant par la méthode des deux phases.

$$\begin{cases} \max[Z(x) = 14x_1 + 27x_2 + 40x_3 + 10x_4] \\ 3x_1 + x_3 + x_4 = 42 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 \leq 112 \\ 4x_2 + x_3 \leq 122 \\ x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \geq 0_{\mathbb{R}^4}. \end{cases}$$

En ajoutant deux variables d'écart aux deux dernières inéquations, on obtient :

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{cases} c^* = (14\ 27\ 40\ 10\ 0\ 0) \\ b = \begin{pmatrix} 42 \\ 112 \\ 122 \end{pmatrix}. \end{cases}$$

Phase 1 : Recherche d'une base réalisable

Il faut ajouter une variable artificielle x_a à la première contrainte pour pouvoir extraire de M' la matrice I_3. On considère donc le problème auxiliaire suivant :

$$\begin{cases} \max[T(y') = -x_a] \\ 3y_1 + y_3 + y_4 + x_a = 42 \\ 2y_1 + 3y_2 + y_3 + y_4 + y_5 = 112 \\ 4y_2 + y_3 + y_6 = 122 \\ y' = (y_1, \ldots, y_6, x_a) \geq 0_{\mathbb{R}^7}. \end{cases}$$

Il est clair que $\{x_a, y_5, y_6\}$ forme un système de variables de base réalisable et que la base correspondante est $B = I_3$. Relativement à cette base, le vecteur c qui correspond à la fonction $T(y') = c^* y' = -x_a$ vérifie $c_N^* = (0\ 0\ 0\ 0)$ et $c_B^* = (-1\ 0\ 0)$. Alors, le vecteur w_N^* coïncide exactement avec la première ligne de la matrice $B^{-1}N$.

Itération 1

y_1	y_2	y_3	y_4		
3	0	1	1	42	x_a
2	3	1	1	112	y_5
0	4	1	0	122	y_6
3	0	1	1	$T = -42$	

$$\lambda = \min\{\tfrac{42}{3} = 14, \tfrac{112}{2} = 56\} = 14$$

Itération 2

x_a	y_2	y_3	y_4		
	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	14	y_1
	3	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	84	y_5
	4	1	0	122	y_6
				$T = 0$	

Le maximum $T = 0$ est atteint puisque la variable artificielle x_a est rendue hors base. Il est donc inutile de calculer w_N^*, on est certain qu'il est négatif. Pour cette raison, la ligne relative à ce vecteur est laissée vide dans le tableau simplexe. Pour le problème (FS) de départ, les variables $\{y_1, y_5, y_6\}$ forment un système de variables de base réalisable. D'après le dernier tableau, la base réalisable B associée à ce système vérifie :

$$B^{-1}b = \begin{pmatrix} 14 \\ 84 \\ 122 \end{pmatrix} \text{ et } B^{-1}N = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 3 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

La colonne relative à la variable artificielle x_a ne joue aucun rôle dans la suite du calcul, elle est de ce fait laissée vide.

Phase 2 : Résolution de (FS) de départ

La valeur de la fonction d'objectif Z au point $y = (14, 0, 0, 0, 84, 122)$, qui correspond à la solution de base associée à B, est égale à 196. Par ailleurs, le classement du vecteur $c^* = (14 \;\; 27 \;\; 40 \;\; 10 \;\; 0 \;\; 0)$ selon J_B et J_N donne :

$$c_B^* = \begin{pmatrix} 14 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } c_N^* = \begin{pmatrix} 27 & 40 & 10 \end{pmatrix}.$$

D'où :

$$\begin{aligned} w_N^* &= c_N^* - c_B^* B^{-1} N \\ &= \begin{pmatrix} 27 & 40 & 10 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 14 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 3 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 27 & 40 & 10 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & \frac{14}{3} & \frac{14}{3} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 27 & \frac{106}{3} & \frac{16}{3} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

A présent, on peut entamer la résolution proprement dite du problème.

Itération 1

y_2	y_3	y_4		
0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	14	y_1
3	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	84	y_5
4	1	0	122	y_6
27	$\frac{106}{3}$	$\frac{16}{3}$	196	

$$\lambda = \min\{\tfrac{14}{\frac{1}{3}}, \tfrac{84}{\frac{1}{3}}, \tfrac{122}{1}\} = 42$$

Itération 2

y_2	y_1	y_4		
0	3	1	42	y_3
3	-1	0	70	y_5
4	-3	-1	80	y_6
27	-106	-30	1680	

$$\lambda = \min\{\tfrac{70}{3}, \tfrac{80}{4}\} = 20$$

Itération 3

y_6	y_1	y_4		
			42	y_3
			10	y_5
			20	y_2
$-\frac{27}{4}$	$-\frac{343}{4}$	$-\frac{93}{4}$	2220	

Le vecteur $w_N^* = (-\frac{27}{4} \quad -\frac{343}{4} \quad -\frac{93}{4})$ étant négatif, le point $y_0 = (0, 20, 42, 0, 10, 0)$ est optimal pour (FS). En tenant compte des variables d'écart, on peut conclure que $x_0 = (0, 20, 42, 0)$ est une solution optimale du (PL) de départ. Elle réalise une valeur maximale égale à $Z(x_0) = 2220$. Noter que le bloc relatif à $B^{-}N$ est laissé vide dans le dernier tableau puisque cette information n'intéresse en rien l'optimalité de la fonction d'objectif.

Au cours de la dernière itération de la première phase, il arrive que w_N^* soit négatif sans que la valeur de la fonction T soit nulle. Dans ce cas, le domaine réalisable $\mathcal{Y}$ associé à (FS) est nécessairement vide. Cette affirmation peut être vérifiée par un simple raisonnement par contraposé. Par ailleurs, si dans le tableau final de la première phase (l'optimum $T = 0$ est atteint), il reste une variable artificielle x_{a_i} nulle parmi les variables

de base, le passage à la deuxième phase est impossible à ce niveau de calcul. Pour ce faire, il faut absolument appliquer une autre itération dans la première phase dans le but de rendre cette variable x_{a_i} hors base. Afin de réaliser cette tache, on choisit sur la ligne de la variable de base x_{a_i} un élément γ_r non nul comme pivot (peu importe $\gamma_r > 0$ ou $\gamma_r < 0$). Bien sûr, il faut effectuer ce choix de sorte que sur la colonne de γ_r figure une variable hors base non artificielle. C'est cette variable structurelle qui permute avec x_{a_i} au cours de cette itération supplémentaire. Nous tenons à signaler que même si γ_r est strictement négatif, la nouvelle solution de base demeure réalisable, étant donné que $\lambda = 0$. Si un tel pivot γ_r n'existe pas, cela veut dire que le système linéaire $My = b$ est redondant. Dans ces circonstances, il faut impérativement supprimer le(s) équation(s) redondante(s) afin de trouver une base d'ordre adéquat.

3.2 Méthode du grand M

Cette méthode se base aussi sur les variables artificielles. A la différence de la méthode des deux phases, la méthode du grand M permet de résoudre le problème en une seule phase. Au lieu de résoudre le problème (FS), cette méthode consiste à considérer le problème suivant :

$$\begin{cases} \max[Z(y') = c^*y - \mathrm{M}\sum_{i\in I} x_{a_i}] \\ y' = \binom{y}{x_a} \in \mathcal{Y}' \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} \min[Z(y') = c^*y + \mathrm{M}\sum_{i\in I} x_{a_i}] \\ y' = \binom{y}{x_a} \in \mathcal{Y}' \end{cases}$$

selon la nature du problème (FS) ("max" ou "min"). La paramètre M est une constante positive suffisamment grande pour s'assurer que la solution optimale ait toutes ses composantes relatives aux x_{a_i}, $i \in I$, nulles. L'origine d'appellation de cette méthode tient à cette constante M[1]. Il est évident que l'application

$$Z(y') = c^*y - \mathrm{M}\sum_{i\in I} x_{a_i}$$

est maximale sur $\mathcal{Y}'$ pour tout $\mathrm{M} > 0$ uniquement si $x_{a_i} = 0$ pour chaque $i \in I$. Une solution optimale de ce problème, lorsqu'elle existe, s'écrit nécessairement sous la forme $y' = \binom{y}{0_{\mathbb{R}^q}}$. Le point y est alors une solution optimale de (FS).

[1] Ne pas confondre la constante M avec la matrice M de (FS).

Exemple 10 Résoudre le même exemple que précédemment par la méthode du grand M.

Le problème auxiliaire est :

$$\begin{cases} \max[Z(y') = 14y_1 + 27y_2 + 40y_3 + 10y_3 - \text{M}x_a] \\ 3y_1 + y_3 + y_4 + x_a \quad = 42 \\ 2y_1 + 3y_2 + y_3 + y_4 + y_5 \quad = 112 \\ 4y_2 + y_3 + y_6 \quad = 122 \\ y' = (y_1, \ldots, y_6, x_a) \geq 0_{\mathbb{R}^7}. \end{cases}$$

Pour la base B relative au système de variables de base réalisable $\{x_a, y_5, y_6\}$, on a :

$$c_N^* = \begin{pmatrix} 14 & 27 & 40 & 10 \end{pmatrix} \text{ et } c_B^* = \begin{pmatrix} -\text{M} & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

D'où :

$$w_N^* = \begin{pmatrix} 14 + 3\text{M} & 27 & 40 + \text{M} & 10 + \text{M} \end{pmatrix}.$$

<u>Itération 1</u>

y_1	y_2	y_3	y_4		
3	0	1	1	42	x_a
2	3	1	1	112	y_5
0	4	1	0	122	y_6
14 + 3M	27	40 + M	10 + M	−42M	

$$\lambda = \min\{\tfrac{42}{3} = 14, \tfrac{112}{2} = 56\} = 14$$

<u>Itération 2</u>

x_a	y_2	y_3	y_4		
$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	14	y_1
$-\frac{2}{3}$	3	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	84	y_5
0	4	1	0	122	y_6
$-\frac{14}{3} - \text{M}$	27	$\frac{106}{3}$	$\frac{16}{3}$	196	

$$\lambda = \min\{\tfrac{14}{\frac{1}{3}}, \tfrac{84}{\frac{1}{3}}, \tfrac{122}{1}\} = 42$$

Itération 3

x_a	y_2	y_1	y_4		
1	0	3	1	42	y_3
-1	3	-1	0	70	y_5
-1	4	-3	-1	80	y_6
$-40-\text{M}$	**27**	-106	-30	1680	

$$\lambda = \min\{\tfrac{70}{3}, \tfrac{80}{4}\} = 20$$

Itération 4

x_a	y_6	y_1	y_4		
				42	y_3
				10	y_5
				20	y_2
$-\frac{133}{4}-\text{M}$	$-\frac{27}{4}$	$-\frac{343}{4}$	$-\frac{93}{4}$	2220	

Naturellement, on retrouve la solution optimale donnée par la précédente technique. Dans la pratique, la méthode des deux phases est souvent privilégiée à la méthode du grand M. Cette dernière cause parfois une erreur de surdépassement (*overflow*) dûe principalement à la manipulation de grands nombres liés à la constante M.

3.3 Méthode de la base non réalisable

Par opposition aux deux méthodes précédentes, la méthode de la base non réalisable ne met pas en jeu les variables artificielles. Le nombre de variables à manipuler reste donc inchangé égal à n. Elle se base sur une constatation simple : le choix d'une base ne pose aucune difficulté, il suffit par exemple d'extraire de M une matrice diagonale ou à la limite triangulaire à éléments diagonaux non nuls. Si cette base est réalisable (*i. e.* $B^{-1}b \geq 0_B$), alors on peut continuer les itérations d'une façon tout à fait habituelle. Sinon, en modifiant légèrement la technique de calcul du paramètre λ, on verra comment passer à une base réalisable.

3.3.1 Cas simple

Supposons que le choix initial de la base B ait aboutit à une solution non réalisable. Le vecteur $B^{-1}b$ admet par conséquent une (ou plusieurs)

coordonnée(s) strictement négative(s). Dans un premier cas, nous allons supposer que la matrice $B^{-1}N$ vérifie la condition suivante :

$$\exists\, s \,/ B^{-1}N_s < 0_B \tag{3.1}$$

Le coût marginal retenu sera alors l'élément d'indice s de w_N^*. Aucune importance n'est accordée au signe de l'élément w_s retenu, l'essentiel c'est qu'il vérifie $B^{-1}N_s < 0_B$. Bien sûr, s'il y a plusieurs indices vérifiant cette condition, il est préférable, pour des problèmes de petite taille, d'appliquer la règle du plus grand coût marginal. Pour des problèmes vérifiant $n - m \gg 1$, l'identification de toutes les colonnes négatives de $B^{-1}N$ peut engendrer un coût de calcul supplémentaire. Dans ce cas de figure, on prendra le plus petit indice s vérifiant la condition (3.1).

Dans l'algorithme du simplexe, le paramètre λ, qui est calculé à partir d'une base réalisable, est conçu de sorte que la base subséquente soit réalisable. Pour une base initiale non réalisable, il est tout à fait naturel de penser à modifier la définition de ce paramètre. Sous l'hypothèse (3.1), nous allons voir qu'il est possible d'obtenir une solution réalisable en une seule itération. Pour cela, il suffit de définir λ de la manière suivante :

$$\lambda = \max\{\frac{(B^{-1}b)_i}{\gamma_i}\,;\ \text{pour } i = 1, \ldots, m \,/\, (B^{-1}b)_i < 0\}, \text{ avec } \gamma = B^{-1}N_s.$$

On retient l'indice r pour lequel le maximum λ est atteint. A la deuxième itération, la $r^{\text{ième}}$ variable de base est permutée avec la $s^{\text{ième}}$ variable hors base. Il est clair que λ est strictement positif, étant le rapport de deux valeurs strictement négatives. Puisque la formule de changement de base

$$(B^{-1}b)_i \leftarrow \begin{cases} (B^{-1}b)_i - \lambda\gamma_i & \text{pour } i \neq r \\ \lambda & \text{pour } i = r \end{cases}$$

demeure valide, la nouvelle solution de base est nécessairement réalisable. En effet, la condition (3.1) est équivalente à $\gamma_i < 0$ pour tout indice i. Donc, pour tout j vérifiant $(B^{-1}b)_j < 0$, on a :

$$\frac{(B^{-1}b)_j}{\gamma_j} \leq \lambda \Longrightarrow (B^{-1}b)_j \geq \lambda\gamma_j \Longrightarrow (B^{-1}b)_j - \lambda\gamma_j \geq 0.$$

En ce qui concerne les autres indices j, on a obligatoirement $(B^{-1}b)_j \geq 0$. Puisque $\gamma_i < 0$ pour $i \in \{1, \ldots, m\}$, et $\lambda > 0$ alors $(B^{-1}b)_j - \lambda\gamma_j \geq 0$. Il

en résulte que $(B^{-1}b)_i - \lambda\gamma_i \geq 0$ pour tout indice $i \neq r$, ce qui justifie que la nouvelle solution de base est réalisable. Arrivant à ce stade de calcul, l'algorithme du simplexe va s'exécuter comme d'habitude.

Exemple 11 On propose de résoudre le (PL) suivant par la méthode de la base non réalisable.

$$\begin{cases} \min[Z(x) = 24x_1 + 17x_2 + 21x_3 + 18x_4] \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 \geq 1 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + 3x_4 \geq 1 \\ x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \geq 0_{\mathbb{R}^4}. \end{cases}$$

En retranchant une variable d'écart positive à chaque inéquation, on obtient :

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{cases} c^* = (24\ 17\ 21\ 18\ 0\ 0) \\ b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{cases}$$

Il est clair que la matrice $B = -I_2$ est une base qui n'est pas réalisable étant donné que $B^{-1}b = -b \ngeq 0_B$. Considérons tout de même le tableau simplexe relatif à cette base non réalisable.

Itération 1

y_1	y_2	y_3	y_4		
-3	-2	-1	1	-1	y_5
-1	$\mathbf{-1}$	-3	-3	-1	y_6
-24	$\mathbf{-17}$	-21	-18	0	

On a $w_N^* = -(24\ 17\ 21\ 15) \leq 0_N^*$, néanmoins, on ne peut pas affirmer que l'optimum est atteint puisque la solution de base en question n'est pas réalisable. La règle du plus grand coût réduit aboutit au choix $w_s = -17$, qui vérifie bien $B^{-1}N_s < 0_B$. Alors, on obtient :

$$\lambda = \max\{\frac{-1}{-2}, \frac{-1}{-1}\} = 1 \text{ et par conséquent, le pivot est } -1.$$

Itération 2

y_1	y_6	y_3	y_4		
-1	-2	5	$\mathbf{7}$	1	y_5
1	-1	3	3	1	y_2
-7	-17	30	$\mathbf{33}$	17	

A ce stade de calcul, la base devient réalisable. L'algorithme du simplexe va devoir s'exécuter d'une façon tout à fait habituelle.

Itération 3

	y_1	y_6	y_3	y_5		
	$-\frac{1}{7}$	$-\frac{2}{7}$	$\frac{5}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$	y_4
	$\frac{10}{7}$	$-\frac{1}{7}$	$\frac{6}{7}$	$-\frac{3}{7}$	$\frac{4}{7}$	y_2
	$-\frac{13}{7}$	$-\frac{41}{7}$	$\frac{30}{7}$	$-\frac{33}{7}$	$\frac{83}{7}$	

$$\lambda = \min\{\tfrac{1}{5}, \tfrac{4}{6}\} = \tfrac{1}{5}$$

Itération 4

	y_1	y_6	y_5	y_4		
					$\frac{1}{5}$	y_3
					$\frac{2}{5}$	y_2
	-1	-5	-6	-9	11	

Le vecteur $w_N^* = -(1\ 5\ 6\ 9)$ étant négatif, l'optimum est atteint. Ainsi, la solution optimale du problème considéré est $x_0 = (0, \frac{2}{5}, \frac{1}{5}, 0)$. Elle réalise une valeur minimale de la fonction d'objectif égale à $Z(x_0) = 11$. Le lecteur pourra vérifier que la résolution de ce même problème par la méthode des deux phases ou encore la méthode du grand M exige en tout et pour tout 6 itérations. D'autant plus, les variables artificielles, dont le nombre est égal à deux, entraînent des calculs supplémentaires.

3.3.2 Cas complexe

Maintenant, on suppose que la matrice $B^{-1}N$ ne contient aucune colonne à composantes toutes négatives strictes. Toutefois, on suppose que la matrice $B^{-1}N$ admet une colonne γ qui satisfait la condition :

$$\gamma_i < 0 \text{ pour les indices } i \text{ tels que } (B^{-1}b)_i < 0 \qquad (3.2)$$

S'il existe plus d'une colonne vérifiant (3.2), on prend celle qui possède le plus petit indice s. De cette façon, on évite de tester cette condition sur toutes les colonnes de $B^{-1}N$. Le coût réduit retenu sera bien sûr le $s^{\text{ième}}$ élément w_s de w_N^*. Il est inutile de prendre un coût réduit nul, puisque ce choix n'affecte pas la fonction économique. Si toutefois $w_s = 0$, il convient de prendre la colonne subséquente j vérifiant à la fois la condition (3.2) et $w_j \neq 0$. Ensuite, on aura à choisir entre

$$\lambda_1 = \min\{\frac{(B^{-1}b)_i}{\gamma_i} \,;\, \text{pour } i = 1, \ldots, m \;/\; (B^{-1}b)_i \geq 0 \text{ et } \gamma_i > 0\}$$

et

$$\lambda_2 = \max\{\frac{(B^{-1}b)_i}{\gamma_i} \text{ ; pour } i = 1, \ldots, m \;/\; (B^{-1}b)_i < 0 \text{ et } \gamma_i < 0\}.$$

On prendra $\lambda = \max\{\lambda_1, \lambda_2\}$ si $w_s > 0$ et $\lambda = \min\{\lambda_1, \lambda_2\}$ si $w_s < 0$. Après l'exécution d'une itération simplexe, on vérifie l'admissibilité de la base obtenue. Dans le cas défavorable, on continue à tester successivement et exclusivement la condition (3.1) ou la condition (3.2) jusqu'à ce qu'une base réalisable soit détectée. Il est utile de signaler qu'avec les conditions fixées dans ce paragraphe, le paramètre λ est bien défini. Autrement dit, la possibilité d'avoir simultanément $\lambda_1 = \min \emptyset$ et $\lambda_2 = \max \emptyset$ n'est pas du tout envisageable.

Exemple 12 On considère le problème d'optimisation linéaire suivant que l'on propose de résoudre par la méthode de la base non réalisable.

$$\begin{cases} \max[Z(x) = x_1 - 3x_2 + x_3] \\ x_1 + x_2 - x_3 \;\geq 1 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 \;\leq 3 \\ -2x_1 + 2x_2 + x_3 \;\leq 4 \\ x = (x_1, x_2, x_3) \geq 0_{\mathbb{R}^3}. \end{cases}$$

La forme standard de ce problème vérifie :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{cases} c^* = (1 \;\; -3 \;\; 1 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0) \\ b = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}. \end{cases}$$

Il est clair que l'ensemble $\{y_4, y_5, y_6\}$ des variables d'écart forme un système de variables de base qui est non réalisable.

<u>Itération 1</u>

y_1	y_2	y_3		
−1	−1	1	−1	y_4
2	1	−1	3	y_5
−2	2	1	4	y_6
1	−3	1	0	

Aucune colonne de la matrice $B^{-1}N$ n'est strictement négative. La première colonne de la matrice $B^{-1}N$ satisfait la condition (3.2) ; de plus on a $w_1 = 1 \neq 0$. Donc, le coût réduit retenu est $w_s = w_1 = 1$.

Concernant le coefficient λ, on a deux possibilités, ou bien $\lambda_1 = \frac{3}{2}$ ou encore $\lambda_2 = \frac{-1}{-1} = 1$. Chacun de ces deux choix aboutit à une base réalisable.

Itération 2

y_5	y_2	y_3		
$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	y_4
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	y_1
1	3	0	7	y_6
$-\frac{1}{2}$	$-\frac{5}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	

Pour le choix $\lambda_1 = \frac{3}{2}$

ou encore

y_4	y_2	y_3		
−1	1	−1	1	y_1
2	−1	1	1	y_5
−2	4	−1	6	y_6
1	−4	2	1	

Pour le choix $\lambda_2 = 1$

Il a été convenu de prendre $\lambda = \max\{\lambda_1, \lambda_2\}$ si $w_s > 0$ et $\lambda = \min\{\lambda_1, \lambda_2\}$ sinon. Ici, le paramètre retenu est $\lambda = \lambda_1 = \frac{3}{2}$. Ainsi, sans recours à la phase I de l'algorithme du simplexe, une solution réalisable a été identifiée. A partir de cette itération, le reste du calcul se fait d'une façon tout à fait habituelle.

Itération 3

y_5	y_2	y_1		
1	−1	2	1	y_3
1	0	1	2	y_1
1	3	0	7	y_6
−2	−1	−3	3	

Le vecteur des coûts réduits étant négatif, l'optimalité est sans aucun doute atteinte. La solution du problème initial est $Z(2, 0, 1) = 3$. Par ailleurs, on pourra vérifier que la phase I de l'algorithme du simplexe aboutit à la base réalisable définie dans le tableau simplexe relatif à $\lambda_2 = 1$.

3.3.3 Cas singuliers

Dans un dernier cas, on suppose qu'aucune colonne γ ne vérifie la condition (3.2). Dans cette situation, deux possibilités sont envisageables :

ou bien

$$\exists\, i_1 \,/\, (B^{-1}b)_{i_1} < 0 \text{ et } \beta_{i_1 j} \geq 0 \;\forall\, j \in \{1, \ldots, n-m\},$$

ou bien

$$\begin{cases} \exists\, i_1 \neq i_2 \;/\; (B^{-1}b)_{i_1} < 0 \text{ et } (B^{-1}b)_{i_2} < 0 \text{ vérifiant :} \\ \beta_{i_1 j} < 0 \text{ pour un certain indice } j \Longrightarrow \beta_{i_2 j} \geq 0. \end{cases}$$

On rappelle que β représente la matrice $B^{-1}N$. Dans toute la suite, $A_{i\bullet}$ désigne la ligne i d'une matrice A donnée. Pour la première possibilité, on montre que le domaine réalisable est forcément vide. En ce qui concerne la deuxième possibilité, on convient de résoudre le problème dual à la place du primal[2]. Un exemple d'application sera donné pour chacun de ces deux cas. Analysons en premier lieu le cas pathologique (*i. e.* domaine réalisable vide : $\mathcal{Y} = \emptyset$).

D'après l'égalité (2.1), tout point $y \in \mathbb{R}^n$ vérifiant $My = b$ s'écrit sous la forme

$$y = \begin{pmatrix} B^{-1}b - \beta y_N \\ y_N \end{pmatrix}, \text{ avec } y_N \in \mathbb{R}^{n-m}.$$

Pour l'indice i_1 qui vérifie $(B^{-1}b)_{i_1} < 0$ et $\beta_{i_1\bullet} \geq 0^*_{\mathbb{R}^{n-m}}$, la composante réelle $(B^{-1}b)_{i_1} - \beta_{i_1\bullet} y_N$ est strictement négative pour tout $y_N \in \mathbb{R}^{n-m}_+$. Autrement dit, il est impossible de trouver un point $y \in \mathbb{R}^n$ qui vérifie à la fois $My = b$ et $y \geq 0_{\mathbb{R}^n}$.

Exemple 13 On considère le programme linéaire suivant que l'on propose de résoudre par la méthode de la base non réalisable.

$$\begin{cases} \max[Z(x) = x_1 - 2x_2] \\ x_1 - 2x_2 \quad \geq 1 \\ 4x_1 - x_2 \quad \leq 2 \\ x_1 - 3x_2 \quad \geq 3 \\ x = (x_1, x_2) \geq 0_{\mathbb{R}^2}. \end{cases}$$

La forme standard de ce problème vérifie :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{cases} c^* = (1 \; -2 \; 0 \; 0 \; 0) \\ b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}. \end{cases}$$

Il est clair que $\{y_3, y_4, y_5\}$ forme un système de variables de base non réalisable.

[2] La notion primal-dual sera définie dans le Chapitre 6.

Itération 1

y_1	y_2		
-1	2	-1	y_3
4	-1	2	y_4
-1	3	-3	y_5
1	-2	0	

$$\lambda_1 = \frac{1}{2} \text{ et } \lambda_2 = \max\{\tfrac{-1}{-1}, \tfrac{-3}{-1}\} = 3$$

Puisque l'élément $w_s = 1$ est strictement positif, le paramètre λ retenu est

$$\lambda = \max\{\lambda_1, \lambda_2\} = 3.$$

Itération 2

y_5	y_2		
1	5	-4	y_3
4	11	-10	y_4
-1	-3	3	y_1
1	1	3	

On observe que la première ligne de la matrice $B^{-1}N$ est positive alors que la première composante de $B^{-1}b$ est strictement négative. Sans nul doute, les contraintes de ce programme linéaire sont incompatibles. La méthode graphique aboutit forcément à la même conclusion.

Exemple 14 On considère le (PL) suivant :

$$\begin{cases} \min[Z(x) = x_1 + 2x_2 + 3x_3] \\ -x_1 + 3x_2 - x_3 \quad \geq 6 \\ 5x_1 - x_2 + 2x_3 \quad \geq 4 \\ x = (x_1, x_2, x_3) \geq 0_{\mathbb{R}^3}. \end{cases}$$

Après la mise sous forme standard, on constate aisément que $B = -I_2$ est une base non réalisable. Le tableau simplexe relatif à cette base est comme suit :

y_1	y_2	y_3		
1	-3	1	-6	y_4
-5	1	-2	-4	y_4
-1	-2	-3	0	

Bien que le problème admette une base réalisable, ce tableau ne permet de calculer ni λ_1 ni λ_2 : les deux lignes de la matrice β alterne entre le

positif et le négatif de façon contraire. Dans ce cas de figure, il est bien naturel de penser au problème dual, qui lui possède une base initiale réalisable évidente.

Tous les cas traités dans cette méthode pour la recherche d'une base initiale réalisable peuvent être récapitulés dans l'algorithme ci-après.

Algorithm 3 Méthode de la base non réalisable

```
Require: base initiale non réalisable
  Initialiser H, base et hbase
  while H(1 : m, p+1) ≱ 0_{R^m} do
    for j = 1 : p do
      if H(1 : m, j) < 0_{R^m} then
        calculer λ = max{ H(i,p+1)/H(i,j) / H(i,p+1) < 0 }
        appliquer une itération simplexe
        exit /* La base en cours est réalisable */
      end if
    end for
    déterminer l'ensemble S = {i ∈ {1,...,m} / H(i,p+1) < 0}
    iter_nb = 0
    j = 1
    while j ≤ p et iter_nb = 0 do
      if H(i,j) < 0 ∀i ∈ S et H(m+1,j) ≠ 0 then
        calculer λ1 = min{ H(i,p+1)/H(i,j) / H(i,p+1) ≥ 0 et H(i,j) > 0 }
        calculer λ2 = max{ H(i,p+1)/H(i,j) / H(i,p+1) < 0 et H(i,j) < 0 }
        if H(m+1,j) > 0 then
          λ = max{λ1, λ2}
        else
          λ = min{λ1, λ2}
        end if
        appliquer une itération simplexe
        iter_nb = 1
      end if
      j ← j + 1
    end while
    if iter_nb = 0 then
      for i ∈ S do
        if H(i, 1 : p) ≥ 0_{R^p} then
          exit /* domaine réalisable vide */
        end if
      end for
      exit /* considérer le problème dual */
    end if
  end while
  La base en cours est réalisable
```

3.4 Application à un problème de mélange

La programmation linéaire a un champ d'application large et varié. Les problèmes de mélange regroupent un ensemble de (PL) dont nous citons ici quelques exemples. En industrie métallurgique, on cherche à produire à moindre coût un alliage de cuivre, de carbone, de nickel, de chrome, *etc*, afin que l'acier obtenu réponde aux exigences requises sur la résistance à la corrosion, la densité et la charge de rupture. Les papetiers fabriquent à coût minimal des papiers obtenus à partir d'un mélange de pâte de cellulose, de papiers recyclés et d'autres ingédients. Les industriels d'agro-alimentaire, élaborent un produit à moindre coût obéissant à certains critères qui peuvent varier d'un industriel à un autre. Il en va de même pour les fabricants de saucisse de volaille, les entrepreneurs de bâtiment, les pétrochimistes. Dans chacune de ces situations, on est amené à construire un modèle qui permet de répondre à la question suivante : combien faut-il mettre de chacun des ingrédients disponibles afin que le mélange obtenu ait à la fois un coût minimal et des caractéristiques qui répondent aux exigences requises ?

Exemple 15 Dans l'industrie d'aliments pour bétail, on désire déterminer la composition, à coût minimal, d'un aliment qui est obtenu en mélangeant au plus trois produits bruts : orge, arachide et sésame. L'aliment ainsi conditionné devra comporter au moins 22% de protéine et 4% de graisse pour se conformer aux exigences de la clientèle. Dans le tableau ci-dessous, on indique les pourcentages de protéine et de graisse obtenues respectivement dans l'orge, l'arachide et le sésame, ainsi que le coût par tonne de chacun des produits bruts.

	Orge	Arachide	Sésame
% de protéine	12%	52%	42%
% de graisse	2%	2%	10%
Coût par tonne	25	41	39

1 - Afin de déterminer la composition à moindre coût d'une tonne d'aliment conforme aux exigences de la clientèle, donner une formulation du problème posé sous forme d'un (PL).

2 - Résoudre ce problème par le simplexe en utilisant la méthode de la base non réalisable.

Pour chaque produit i (orge, arachide et sésame), on désigne par x_i sa proportion dans un mélange d'une tonne. De la définition même des variables x_i, il est impératif que :

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1 \text{ et } x_i \geq 0 \text{ pour } i = 1, 2, 3.$$

Tout mélange unitaire d'orge d'arachide et de sésame de proportion respective x_1, x_2 et x_3 contient :

$$(12x_1 + 52x_2 + 42x_3)\% \text{ de protéine et } (2x_1 + 2x_3 + 10x_3)\% \text{ de graisse.}$$

Les exigences de la clientèle sur l'aliment obtenu se traduisent par :

$$\begin{cases} 12x_1 + 52x_2 + 42x_3 \geq 22 \\ 2x_1 + 2x_3 + 10x_3 \geq 4. \end{cases}$$

Le coût d'une tonne de mélange de proportion x_1, x_2 et x_3 vaut :

$$Z(x_1, x_2, x_3) = 25x_1 + 41x_2 + 39x_3.$$

Enfin, la détermination, à moindre coût, du mélange d'une tonne d'aliment conforme aux exigences requises se traduit par la recherche d'une solution optimale du (PL) suivant :

$$\begin{cases} \min[Z(x_1, x_2, x_3) = 25x_1 + 41x_2 + 39x_3] \\ \qquad x_1 + x_2 + x_3 \quad = 1 \\ 12x_1 + 52x_2 + 42x_3 \quad \geq 22 \\ \quad 2x_1 + 2x_2 + 10x_3 \quad \geq 4 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0. \end{cases}$$

Pour résoudre ce problème par le simplexe, il faut tout d'abord l'écrire sous forme standard :

$$\begin{cases} \min[Z(y) = 25y_1 + 41y_2 + 39y_3] \\ \quad y_1 + y_2 + y_3 = 1 \\ 12y_1 + 52y_2 + 42y_3 - y_4 = 22 \\ 2y_1 + 2y_2 + 10y_3 - y_5 = 4 \\ y = (y_1, \ldots, y_5) \geq 0_{\mathbb{R}^5}. \end{cases}$$

La matrice associée au système de variables $\{y_1, y_4, y_5\}$ est

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 12 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Il est facile de vérifier que B est inversible et que $B^{-1} = B$. Les éléments du tableau simplexe relatifs à cette base sont :

$$B^{-1}b = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 12 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 22 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -10 \\ -2 \end{pmatrix},$$

$$B^{-1}N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 12 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 52 & 42 \\ 2 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -40 & -30 \\ 0 & -10 \end{pmatrix},$$

et

$$\begin{aligned} w_N^* &= c_B^* B^{-1}N - c_N^* \\ &= \begin{pmatrix} 25 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -40 & -30 \\ 0 & -10 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 41 & 39 \end{pmatrix} \\ &= -\begin{pmatrix} 16 & 14 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Il est clair que la base en question n'est pas réalisable étant donné que $B^{-1}b \ngeq 0_B$. La valeur de la fonction d'objectif au point de base associé à B vaut $Z(1, 0, 0, -10, -2) = 25$.

<u>Itération 1</u>

y_2	y_3		
1	1	1	y_1
−40	**−30**	−10	y_4
0	−10	−2	y_5
−16	**−14**	25	

Bien que la condition d'optimalité $w_N^* \leq 0_N^*$ soit vérifiée, on ne peut pas conclure que la base B est optimale. La raison est toute simple, la base B n'est pas réalisable. La matrice $B^{-1}N$ ne possède aucune colonne négative. L'algorithme de la base non réalisable nous conduit à choisir le coût réduit $w_s = -14$ pour lequel la deuxième colonne vérifie la condition (3.2). A cette valeur, sont associés deux paramètres :

$$\lambda_1 = \min\{\frac{1}{1}\} = 1 \text{ et } \lambda_2 = \max\{\frac{-10}{-30}, \frac{-2}{-10}\} = \frac{1}{3}.$$

Puisque $w_s < 0$, le paramètre retenu est $\lambda = \min\{\lambda_1, \lambda_2\} = \frac{1}{3}$.

Itération 2

y_2	y_4		
$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{30}$	$\frac{2}{3}$	y_1
$\frac{4}{3}$	$-\frac{1}{30}$	$\frac{1}{3}$	y_3
$\frac{40}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{4}{3}$	y_5
$\frac{8}{3}$	$-\frac{7}{15}$	$\frac{89}{3}$	

$\lambda = \min\{\frac{1}{4}, \frac{4}{40}\} = \frac{1}{10}$

Itération 3

y_5	y_4		
		$\frac{7}{10}$	y_1
		$\frac{2}{10}$	y_3
		$\frac{1}{10}$	y_2
$-\frac{1}{5}$	$-\frac{2}{5}$	$\frac{197}{5}$	

A la deuxième itération, la base acquiert le qualificatif de réalisable. A ce niveau, l'algorithme du simplexe évoluera d'une façon habituelle. L'optimalité est atteinte à l'itération 3, étant donné que le vecteur des coûts réduits est négatif. D'après le dernier tableau simplexe, une tonne d'aliment, à moindre coût et qui obéit aux critères demandés, doit comporter 70% d'orge, 10% d'arachide et 20% de sésame. Ainsi, le coût optimal d'une tonne de ce mélange vaut $197/5 = 39,400$. On aimerait signaler que la résolution de ce même (PL) par la méthode des deux phases nécessite 5 itérations. Cela induit sans doute un coût de calcul supplémentaire surtout avec l'introduction de deux variables artificielles au niveau de la première phase.

3.5 Exercices

Exercice 3.5.1

Résoudre les (PL) suivants par la méthode du simplexe. Dans le cas où la solution optimale trouvée

- *est dégénérée, proposer deux bases optimales différentes,*
- *n'est pas unique, proposer une infinité de solutions optimales.*

Dans le cas où l'optimum est infini, proposer une famille $(x_\lambda)_{\lambda \geq 0}$ *de solutions réalisables telle que* $\lim_{\lambda \to +\infty} Z(x_\lambda) = \pm\infty$.

1) $\begin{cases} \max[Z(x) = 4x_1 + 3x_2] \\ 3x_1 + 4x_2 \leq 12 \\ 3x_1 + 3x_2 \leq 10 \\ 4x_1 + 2x_2 \leq 8 \\ x = (x_1, x_2) \geq 0_{\mathbb{R}^2}. \end{cases}$

2) $\begin{cases} \max[Z(x) = -6x_1 - 8x_2] \\ 3x_1 + 4x_2 \leq 12 \\ 3x_1 + 3x_2 \leq 10 \\ 4x_1 + 2x_2 \leq 8 \\ x = (x_1, x_2) \geq 0_{\mathbb{R}^2}. \end{cases}$

$$3)\left\{\begin{array}{ll}\min[Z(x)=3x_1+x_2+4x_3+5x_4] & \\ 9x_1+2x_2+6x_3+5x_4+3x_5 & \leq 5 \\ 8x_1+9x_2+7x_3+9x_4+3x_5 & \leq 2 \\ x=(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)\geq 0_{\mathbb{R}^5}. & \end{array}\right.$$

$$4)\left\{\begin{array}{ll}\max[Z(x)=x_1-x_2] & \\ -2x_1+x_2 & \leq -1 \\ -x_1-2x_2 & \leq -2 \\ x=(x_1,x_2)\geq 0_{\mathbb{R}^2}. & \end{array}\right. \qquad 5)\left\{\begin{array}{ll}\min[Z(x)=x_1-x_2] & \\ 2x_1+2x_2 & \geq 10 \\ x_1+x_2 & \leq 2 \\ x=(x_1,x_2)\geq 0_{\mathbb{R}^2}. & \end{array}\right.$$

$$6)\left\{\begin{array}{ll}\min[Z(x)=-8x_1+9x_2+2x_3-6x_4-5x_5] & \\ 6x_1+6x_2-10x_3 2x_4-8x_5 & \geq 3 \\ x=(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)\geq 0_{\mathbb{R}^5}. & \end{array}\right.$$

Exercice 3.5.2

Un agriculteur dispose d'une superficie cultivable de 50 ha. Les légumes cultivés sont les tomates qui se vendent à 0,500DT le kg, les laitues qui se vendent à 0,350DT la pièce et le persil qui se vend à 0,295DT la livre (une livre = 1/2 kg). Les rendements annuels par ha sont respectivement de 2 tonnes, 4000 pièces et 1 tonne pour les tomates, la laitue et le persil. Pour obtenir ces résultats, il faut employer des engrais à raison de 100kg/ha pour les tomates et les laitues et à raison de 50kg/ha pour le persil. D'autre part, l'agriculteur doit employer des ouvriers pour une journée pour les travaux d'aménagement du sol, une deuxième journée pour la semence et une dernière pour la récolte. Ces 3 activités demandent respectivement 10 ouvriers/jour par ha pour les tomates, de 20 ouvriers/jour par ha pour la laitue et de 6 ouvriers/jour par ha pour le persil. Compte tenu des disponibilités locales en main d'œuvre, l'agriculteur ne peut employer que 400 ouvriers par jour.

L'engrais revient à 5DT le kg et le coût d'un ouvrier/jour est de 7DT. On pose respectivement x_1, x_2 et x_3 les superficies cultivées pour les tomates, les laitues et le persil.

1) a - *Déterminer en fonction des variables x_i, le coût annuel de la main d'œuvre et des engrais.*

b - *Même question pour le gain annuel dû à cette exploitation.*

c - *En déduire en fonction des variables x_i le bénéfice annuel net.*

2) a - *Modéliser le problème qui consiste à déterminer le meilleur programme de production.*

b - *Déterminer la stratégie optimale de production à l'aide de la méthode du simplexe.*

c - *Cette stratégie optimale est-elle unique ? Sinon, proposer une deuxième stratégie optimale.*

d - *En déduire toutes les stratégies optimales de production.*

3) *Peut-on améliorer le programme si on dispose de 200 ouvriers/jour de main d'œuvre supplémentaire ? Justifier votre réponse.*

Exercice 3.5.3

On considère le (PL) suivant :

$$\begin{cases} \max[Z(x) = 2x_1 + 18x_2 + 5x_3 + 14x_4] \\ -x_1 + x_2 + x_3 - x_4 \qquad = 1 \\ 2x_1 + 7x_2 + x_3 + 8x_4 \qquad = 7 \\ 2x_1 + 10x_2 + 2x_3 + 10x_4 \quad = 10 \\ x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \geq 0_{\mathbb{R}^4}. \end{cases}$$

1) *Appliquer la phase I pour la recherche d'une base réalisable. Que peut-on dire ?*

2) *Résoudre alors ce problème par le simplexe.*

3) *On remplace $b_3 = 10$ par $b_3 = 8$. Résoudre le problème, ainsi modifié, par la méthode des deux phases.*

Exercice 3.5.4

On considère la forme canonique suivante :

$$\begin{cases} \min[Z(x) = -2x_1 - x_2] \\ x_1 - x_2 \leq 2 \\ -x_1 + 3x_2 \leq 8 \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 20 \\ -x_1 + 7x_2 \geq 7 \\ x = (x_1, x_2) \geq \mathbb{R}^2. \end{cases}$$

1) *Donner une résolution graphique.*

2) **a** - *Résoudre ce problème par la méthode de la base non réalisable.*

b - *Décrire le cheminement des sommets parcourus qui correspond à l'application de la méthode de la base non réalisable.*

3) *Répondre aux mêmes questions que 2) mais en appliquant la méthode des deux phases. Que peut-on dire ?*

4) *Supprimer une contrainte sans que cela n'apporte de changement sur le domaine réalisable. Donner alors la solution du problème ainsi trouvé.*

Exercice 3.5.5

On considère le système d'inéquations linéaires suivant :

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 & \leq 2 \\ x_1 - 2x_2 & \leq -8 \\ x_1 + x_2 & \leq 5 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 & \geq 0. \end{cases}$$

1) a - *Représenter par un graphique l'ensemble des solutions de ce système.*

b - *Résoudre ce système par le simplexe.*

c - *Trouver le lien entre la représentation graphique et l'ensemble des solutions trouvé par le simplexe.*

2) *Résoudre par le simplexe ce problème en remplaçant l'inéquation* $x_1 + x_2 \leq 5$ *par* $x_1 + x_2 \geq 5$.

Chapitre 4

Cas particuliers

Ce chapitre est consacré à l'étude des cas extrêmes qui peuvent estomper tout espoir de résolution en temps fini ou en nombre polynomial d'itérations. Dans le soucis de réduire la compexité temporelle, deux algorithmes, issus du simplexe, seront étudiés. Le premier s'adapte mieux à des (PL) où plusieurs variables de décision sont astreintes à être bornées. Quant au deuxième, il est souvent utilisé pour résoudre des problèmes de grande taille.

4.1 Dégénérescence - Cyclage

4.1.1 Optimalité sous dégénérescence

Au cours du Théorème 2.3.1, on avait établi que "$w_N^* \leq 0_N^*$" était une condition suffisante d'optimalité, elle devient nécessaire en cas de non dégénérescence de la base optimale. En présence d'une solution dégénérée, nous allons voir à travers un exemple, qu'il est possible que l'optimum soit atteint sans que la condition "$w_N^* \leq 0_N^*$" soit satisfaite. Toutefois, puisque tout point dégénéré $y^{(0)}$ est solution de plusieurs bases réalisables, on peut concevoir d'ajouter une (ou plusieurs) itération(s) du simplexe afin d'aboutir à une base réalisable qui vérifie $w_N^* \leq 0_N^*$. Bien évidemment, cette base admet la même solution réalisable $y^{(0)}$ et donne la même valeur optimale $Z(y^{(0)})$ étant donné que la paramètre λ est nul.

Exemple 16 Résoudre le (PL) ci-après par l'algorithme du simplexe.

$$\begin{cases} \max[Z(x) = 4x_1 + 2x_2 + x_3] \\ x_1 + x_2 \leq 1 \\ x_1 + x_3 \leq 1 \\ x = (x_1, x_2, x_3) \geq 0. \end{cases}$$

Les éléments qui interviennent dans la forme standard de ce (PL) sont :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \; c^* = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Il est facile de vérifier que la matrice $B = I_2$, relative au système $\{y_4, y_5\}$, est une base réalisable.

<u>Itération 1</u>

y_1	y_2	y_3		
1	1	0	1	y_4
1	0	1	1	y_5
4	2	1	0	

$$\lambda = \min\{\tfrac{1}{1}, \tfrac{1}{1}\} = 1$$

Le minimum λ est atteint pour deux indices différents, on choisit le premier rencontré qui correspond à la variable y_4.

<u>Itération 2</u>

y_4	y_2	y_3		
1	1	0	1	y_1
-1	-1	**1**	0	y_5
-4	-2	**1**	4	

$$\lambda = \min\{\tfrac{0}{1}\} = 0$$

<u>Itération 3</u>

y_4	y_2	y_5		
1	1	0	1	y_1
-1	-1	1	0	y_3
-3	-1	-1	4	

Le vecteur $w_N^* = (-3 \;\; -1 \;\; -1)$ étant négatif, le maximum est atteint et il vaut $Z = 4$. Remarquer que cette valeur maximale est atteinte à l'itération 2 alors que $w_N^* = (-4 \;\; -2 \;\; 1)$ n'est pas négatif. D'ailleurs la solution optimale $(1, 0, 0, 0, 0, 0)$ est la même aussi bien à l'itération 3 qu'à l'itération 2.

4.1.2 Règle de pivotage

En l'absence de dégénérescence, le choix de w_s permet de déterminer d'une façon unique le pivot β_{rs}. Comme on peut le constater à travers les exemples précédents, le choix de w_s est en général multiple. Le critère permettant de fixer automatiquement le choix de w_s s'appelle **règle de pivotage**. Au cours de la résolution d'un (PL) par l'algorithme du simplexe, le nombre d'itérations effectuées peut dépendre de la règle de pivotage retenue. Pour justifier cette affirmation, prenons l'Exemple 1 et considérons la règle de pivotage qui choisit la plus petite valeur w_s strictement positive. Le lecteur pourra vérifier aisément que la résolution s'effectue selon le schéma suivant :

<u>Itération 1</u>

y_1	y_2		
2	1	8	y_3
1	2	7	y_4
0	1	3	y_5
4	5	0	

$\lambda = 4$

<u>Itération 2</u>

y_3	y_2		
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	4	y_1
$-\frac{1}{2}$	$\mathbf{\frac{3}{2}}$	3	y_4
0	1	3	y_5
−2	**3**	16	

$\lambda = 2$

<u>Itération 3</u>

y_3	y_4		
		3	y_1
		2	y_2
		1	y_5
−1	−2	22	

La solution est atteinte au bout de 3 itérations alors que la règle de pivotage qui consiste à prendre la plus grande valeur w_s strictement positive exige 4 itérations.

Il est évident que la meilleure règle de pivotage pour un (PL) que ce soit de type maximisation ou minimisation se résume aux étapes suivantes :

⋆ pour chaque w_j strictement positif, calculer le paramètre λ.

⋆ Retenir l'élément w_s qui assure la valeur maximale du produit λw_s.

De cette façon, une amélioration optimale de la fonction d'objectif sera assurée à chaque itération. Dans la pratique, cette technique, appelée **règle du meilleur accroissement**, n'est pas implémentée dans les logiciels de programmes linéaires. La technique retenue est celle qui consiste à choisir la plus grande valeur w_s, elle s'appelle **règle du meilleur coût marginal**. Il est clair que le nombre d'itérations exigées par la règle du meilleur accroissement est minimal. Mais, cela n'implique guère que cette règle induit un temps d'exécution optimal. Le calcul du paramètre λ pour chaque $w_j > 0$ représente un coût de calcul supplémentaire qui peut ruiner l'avantage acquis en nombre d'itérations.

4.1.3 Cyclage

Un cas extrême peut cependant survenir, il se pourrait en effet que plusieurs itérations soient parcourues sans que la valeur de la fonction d'objectif ne varie et puis on retrouve une base réalisable déjà rencontrée. L'algorithme du simplexe va boucler indéfiniment, on parle alors du **problème de cyclage**. Cette situation n'est envisageable qu'en cas de dégénérescence. En effet, en l'absence de dégénérescence, la valeur de la fonction d'objectif s'améliore d'une façon stricte à chaque itération. L'éventualité de rencontrer la même base dans deux itérations différentes n'est donc pas possible. Dans la pratique, le problème de cyclage n'est jamais rencontré. Ceci est dû principalement aux erreurs d'arrondi sur machine qui n'affecte pas la valeur exacte zéro pour une solution dégénérée. Des exemples numériques de cyclage ont été reportés dans la littérature [13]. Cependant, ces exemples n'ont pas été inspirés d'un problème économique réel, ils ont été construits délibérément avec beaucoup de soin et d'attention pour qu'ils puissent cycler. Tout de même, il existe un certain nombre de techniques théoriques qui permettent d'éviter le cyclage (voir par exemple [10, 13]). Un exemple sur le cyclage de l'algorithme du simplexe, construit par Beale E. M. L. [1], sera proposé en tant qu'exercice à la fin de ce chapitre.

Exemple 17 On considère le (PL) suivant :

$$\begin{cases} \max[Z(x) = 10x_1 - 57x_2 - 9x_3 - 24x_4] \\ x_1 - 11x_2 - 5x_3 + 18x_4 \quad \leq 0 \\ x_1 - 3x_2 - 5x_3 + 2x_4 \quad \leq 0 \\ x_1 \quad \leq 1 \\ x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \geq 0_{\mathbb{R}^4}. \end{cases}$$

1 - Résoudre ce (PL) par l'algorithme du simplexe en appliquant la règle de pivotage suivante :

⋆ si plusieurs w_s sont strictement positifs, choisir w_s ayant le plus petit indice s.

⋆ En cas de dégénérescence, choisir le pivot ayant le plus petit indice r.

Remarquer que l'algorithme boucle en 7 itérations.

2 - Résoudre le problème en appliquant la règle de plus faible coût marginal et montrer que l'algorithme du simplexe converge.

Après la mise sous forme standard, la résolution par la règle de pivotage indiquée ci-dessus donne successivement les tableaux suivants :

Itération 1

y_1	y_2	y_3	y_4		
1	-11	-5	18	0	y_5
1	-3	-1	2	0	y_6
1	0	0	0	1	y_7
10	-57	-9	-24	0	

$\lambda = 0$

Itération 2

y_5	y_2	y_3	y_4		
1	-11	-5	18	0	y_1
-1	**8**	4	-16	0	y_6
-1	11	5	-18	1	y_7
-10	**53**	41	-204	0	

$\lambda = 0$

Itération 3

y_5	y_6	y_3	y_4		
$-\frac{3}{8}$	$\frac{11}{8}$	$\frac{1}{2}$	-4	0	y_1
$-\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$	-2	0	y_6
$\frac{3}{8}$	$-\frac{11}{8}$	$-\frac{1}{2}$	4	1	y_7
$-\frac{27}{8}$	$-\frac{53}{8}$	$\frac{29}{2}$	-98	0	

$\lambda = 0$

Itération 4

y_5	y_6	y_1	y_4		
$-\frac{3}{4}$	$\frac{11}{4}$	2	-8	0	y_3
$\frac{1}{4}$	$-\frac{5}{4}$	-1	**2**	0	y_2
0	0	1	0	1	y_7
$\frac{15}{2}$	$-\frac{93}{2}$	-29	**18**	0	

$\lambda = 0$

Itération 5

y_5	y_6	y_1	y_2		
$\frac{1}{4}$	$-\frac{9}{4}$	-2	-4	0	y_3
$\frac{1}{8}$	$-\frac{5}{8}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	y_4
0	0	1	0	1	y_7
$\frac{21}{4}$	$-\frac{141}{4}$	-20	-9	0	

$\lambda = 0$

Itération 6

y_3	y_6	y_1	y_2		
4	-9	-8	16	0	y_5
$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$	0	y_4
0	0	1	0	1	y_7
-21	12	22	-93	0	

$\lambda = 0$

Itération 7

y_3	y_4	y_1	y_2		
-5	18	1	-11	0	y_5
-1	2	1	-3	0	y_6
0	0	1	0	1	y_7
-9	-24	10	-57	0	

Ainsi, on retrouve le premier tableau simplexe au bout de 7 itérations. L'algorithme du simplexe est contraint de boucler indéfiniment.

Maintenant, on change de règle de pivotage de façon à retenir systématiquement le plus petit w_s strictement positif. Les deux premiers tableaux simplexe restent les mêmes sauf que l'élément w_s mis en jeu sera $w_s = 41$ à la place de $w_s = 53$. Ainsi, le pivot devient $\beta_{23} = 4$ et la variable y_6 va devoir permuter avec y_3. A partir de la deuxième itération, la règle de plus faible coût marginal donne ce qui suit :

Itération 3

y_5	y_2	y_6	y_4		
$-\frac{1}{4}$	-1	$\frac{5}{4}$	-2	0	y_1
$-\frac{1}{4}$	2	$\frac{1}{4}$	-4	0	y_3
$\frac{1}{4}$	1	$-\frac{5}{4}$	2	1	y_7
$\frac{1}{4}$	-29	$-\frac{41}{4}$	-40	0	

$\lambda = 4$

Itération 4

y_7	y_2	y_6	y_4		
				1	y_1
				1	y_3
				4	y_5
-1	-30	-9	-42	1	

Le vecteur des coûts réduits étant atteint, on peut affirmer que le maximum, qui vaut 4, est atteint au point $x_0 = (1, 0, 1, 0)$.

4.2 Un cas extrême

Par opposition à la méthode d'énumération des sommets, l'algorithme du simplexe est conçu selon une démarche qui évite de parcourir tous les sommets dont le nombre est souvent exponentiel. Il se trouve que certains problèmes forcent la méthode du simplexe à passer par quasiment tous les sommets ruinant ainsi tout espoir de résolution en un nombre polynomial d'itérations. Un cas extrême a été proposé par Klee et Minty [20] en dimension p :

$$(KM)\begin{cases} \max[Z(x) = \sum_{j=1}^{p} 10^{p-j} x_j] \\ 2(\sum_{j=1}^{i-1} 10^{i-j} x_j) + x_i \leq 100^{i-1},\ 1 \leq i \leq p \\ x = (x_1, \ldots, x_p) \geq 0_{\mathbb{R}^p}. \end{cases}$$

Résolvons ce (PL) pour $p = 3$ en prenant systématiquement l'élément w_s le plus élevé. La mise sous forme standard conduit aux données suivantes :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 20 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 200 & 20 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{cases} b = \begin{pmatrix} 1 \\ 100 \\ 10000 \end{pmatrix} \\ c^* = (100\ 10\ 1\ 0\ 0\ 0). \end{cases}$$

La résolution par la méthode du simplexe selon la règle du meilleur coût marginal donne :

Itération 1

y_1	y_2	y_3		
1	0	0	1	y_4
20	1	0	100	y_5
200	20	1	10000	y_6
100	10	1	0	

$\lambda = 1$

Itération 2

y_4	y_2	y_3		
1	0	0	1	y_1
−20	**1**	0	80	y_5
−200	20	1	9800	y_6
−100	**10**	1	100	

$\lambda = 80$

Itération 3

y_4	y_5	y_3		
1	0	0	1	y_1
−20	1	0	80	y_2
200	−20	1	8200	y_6
100	−10	1	900	

$\lambda = 1$

Itération 4

y_1	y_5	y_3		
1	0	0	1	y_4
20	1	0	100	y_2
−200	−20	**1**	8000	y_6
−100	−10	**1**	1000	

$\lambda = 8000$

Itération 5

y_1	y_5	y_6		
1	0	0	1	y_4
20	1	0	100	y_2
−200	−20	1	8000	y_3
100	10	−1	9000	

$\lambda = 1$

Itération 6

y_4	y_5	y_6		
1	0	0	1	y_1
−20	**1**	0	80	y_2
200	−20	1	8200	y_3
−100	**10**	−1	9100	

$\lambda = 80$

Itération 7

y_4	y_2	y_6		
1	0	0	1	y_1
−20	1	0	80	y_5
−200	20	1	9800	y_3
100	−10	−1	9900	

$\lambda = 1$

Itération 8

y_1	y_2	y_6		
			1	y_4
			100	y_5
			10000	y_3
−100	−10	−1	10000	

Il faut donc 8 itérations pour obtenir la solution optimale du problème (KM) pour $p = 3$. Plus généralement, il a été démontré que pour un nombre de variables de décision $p \geq 3$, la règle de pivotage, qui prend systématiquement le plus grand élément w_s de w_N^*, exige 2^p itérations. L'algorithme du simplexe parcourt donc un nombre de sommets qui est exponentiel en p afin d'achever la résolution de (KM). Malgré cela, cette règle de pivotage est implémentée dans presque tous les programmes informatiques de l'algorithme du simplexe. La raison majeure de ce choix s'explique par l'efficacité de cette règle dans la résolution de problèmes réels d'optimisation linéaire. Par ailleurs, on aimerait convier le lecteur à résoudre le problème (KM) en prenant comme règle de pivotage le plus petit élément w_s strictement positif. Il pourra remarquer que le même problème sera résolu en seulement 2 itérations !

Comme expliqué auparavant, le problème de cyclage, lorsqu'il survient, est spécifique à la dégénérescence. On a vu également que toute solution réalisable dégénérée, lui correspond différentes bases réalisables. Explicitement, cela veut dire que pour un sommet C du domaine réalisable de $\mathbb{R}^p$, il existe non seulement p mais au moins $(p+1)$ hyperplans frontières qui passent par C. En terme probabiliste, si les éléments de la matrice A régissant les contraintes $Ax \leq b$ sont générées d'une façon purement

aléatoire, il est peu probable qu'un sommet soit dégénéré. Malheureusement, en pratique la dégénérescence est la règle et non l'exception. Des techniques de pivotage ont été proposées dans la littérature pour éviter le problème de cyclage. On cite entre autres la **règle de plus petit indice** ou **règle de Bland** [2] qui choisit la variable y_k ayant le plus petit indice k comme candidate pour accéder à la base. La **règle du choix aléatoire**, proposée par Dantzig [7], garantit elle aussi une résolution en un nombre fini d'itéations. Cette règle choisit la variable entrante de manière aléatoire. Les règles de pivotage sous dégénérescence sont examinées en détail dans le livre de Dantzig et Thapa [9].

4.3 Programmes linéaires à variables bornées

Dans plusieurs programmes linéaires, certaines contraintes de positivité $x_i \geq 0$ peuvent avoir une forme plus générale de type $x_i \geq l_i$ ou $x_i \leq u_i$. Dans cette situation, il est tout à fait naturel d'effectuer le changement de variable $x'_i = x_i - l_i$ ou $x'_i = u_i - x_i$. Ainsi, on récupère la contrainte de positivité souhaité $x'_i \geq 0$. Dans d'autres situations en programmation linéaire, il se peut que certaines variables de décision soient astreintes à être minorées et majorées, on parle alors de variables bornées. Par exemple, l'industriel est confronté, en cas de saturation de marché, de limiter sa production ou de fixer un seuil pour le nombre d'unités fabriqués. Dans ces circonstances, on est amené à résoudre un (PL) de la forme :

$$\begin{cases} \max[Z(x) = \sum_{j=1}^{p} c_j x_j] & \\ \sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_j \leq b_i, & \text{pour } i = 1, \ldots, m \\ 0 \leq x_j \leq u_j, & \text{pour } j = 1, \ldots, p, \end{cases} \tag{4.1}$$

où les u_j sont des constantes positives fixées. L'application de la méthode du simplexe sur ce type de problème ne pourra être réalisée en toute rigueur que si les contraintes $x_j \leq u_j$ sont incorporées dans les contraintes

d'inégalités :

$$\begin{cases} \max[Z(x) = \sum_{j=1}^{p} c_j x_j] & \\ \sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_j \leq b_i, & \text{pour } i = 1, \ldots, m \\ x_j \leq u_j, & \text{pour } j = 1, \ldots, p, \\ x = (x_1, \ldots, x_p) \geq 0_{\mathbb{R}^p}. & \end{cases}$$

La mise sous forme standard du problème (4.1) conduit à une matrice M de taille $(m+p, m+2p)$. Toute base réalisable de ce problème sera une matrice d'ordre $(m+p)$. Une autre alternative, dûe à Dantzig [6], engage des bases réalisables dont la taille vaut seulement (m, m). Cette technique s'applique dans un contexte plus général :

$$\begin{cases} \max[Z(y) = c^* y] \\ My = b \\ l \leq y \leq u. \end{cases} \tag{4.2}$$

Ici, parmi les composantes l_i du vecteur l, il se peut qu'il y est le symbole $-\infty$, signifiant dans ce cas qu'aucune borne inférieure n'est imposée à la variable y_i. De même pour les composantes u_i de u dont certaines peuvent égales à $+\infty$, n'exigeant ainsi aucune borne supérieure à la variable y_i. Toutefois, on suppose que pour chaque indice i, les bornes l_i et u_i ne peuvent être simultanément infinies. Le problème particulier (4.2) s'appelle **forme standard à variables bornées**. Pour écrire le problème (4.1) sous cette forme, il suffit d'ajouter m variables d'écart $x_{p+1}, \ldots, x_{p+m}$ aux différentes contraintes d'inégalité $\sum a_{ij} x_j \leq b_i$. Les bornes inférieures (lower) et supérieures (upper) de ces variables d'écart sont définies par $l_{p+i} = 0$ et $u_{p+i} = +\infty$. Dans notre contexte général, on suppose que M est une matrice (m, n) de rang m. Une base B n'est autre qu'une sous matrice carrée de M inversible et d'ordre m. Dans le Chapitre 2, on a vu que toute solution $y = \binom{y_B}{y_N}$ du système linéaire $My = b$ s'écrit sous la forme :

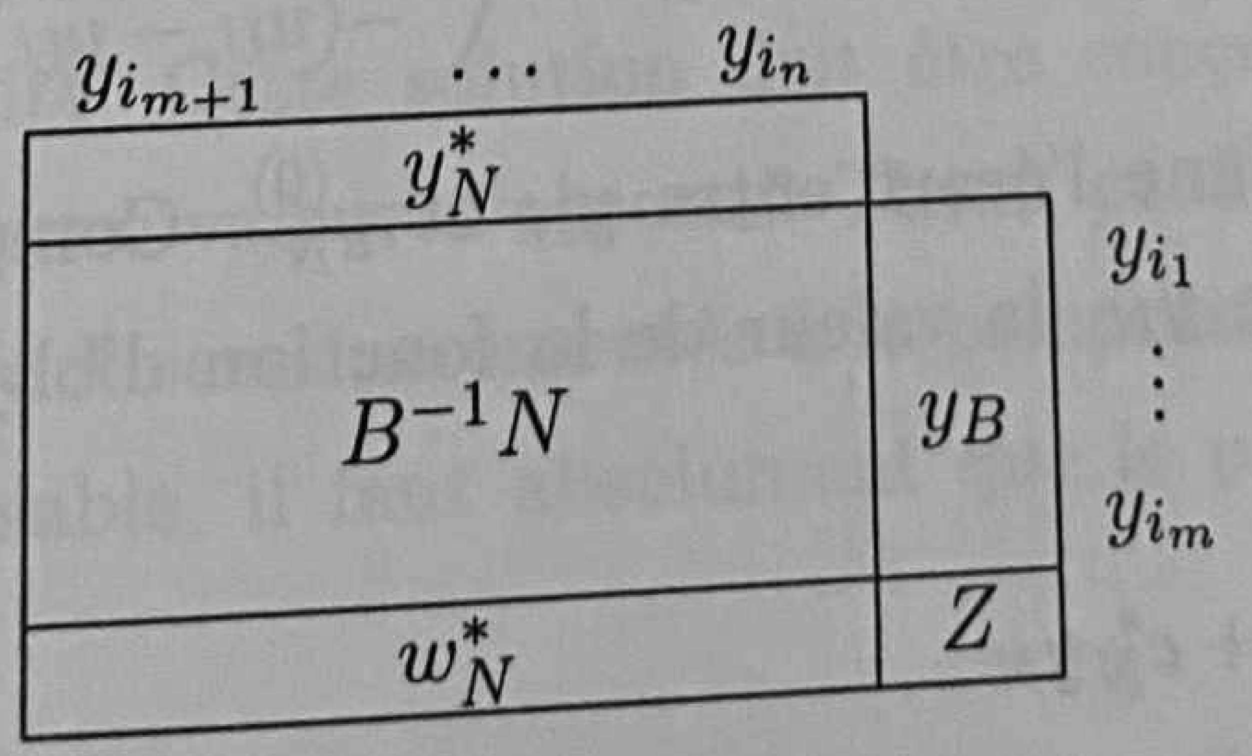
$$y = \begin{pmatrix} y_B = B^{-1}b - B^{-1}Ny_N \\ y_N \end{pmatrix}, \text{ avec } y_N \in R^{n-m} \tag{4.3}$$

Pour une forme standard ordinaire (régie par les contraintes $My = b$ et $y \geq 0_{\mathbb{R}^n}$), la solution de base relative à B est le point $y \in \mathbb{R}^n$ vérifiant

$y_N = 0_N$ et $My = b$. Il s'agit du point $y = \binom{B^{-1}b}{0_N}$ qui acquiert le qualificatif de réalisable uniquement si $B^{-1}b \geq 0_B$. Concernant une forme standard à variables bornées, la ressemblance est sans équivoque, on appelle **solution de base** tout point $y \in \mathbb{R}^n$ vérifiant $My = b$ et $y_i \in \{l_i, u_i\}$ pour $i \in J_N$. Une telle solution de base est réalisable si et seulement si elle vérifie $l_B \leq B^{-1}b - B^{-1}Ny_N \leq u_B$. A la différence des formes standards ordinaires, une base réalisable B peut lui correspondre plusieurs solutions de base réalisable. En effet, l'écriture sous forme standard à variables bronées de l'Exemple 1 conduit au problème suivant :

$$\begin{cases} \max[Z(y_1, y_2, y_3, y_4) = 4y_1 + 5y_2] \\ 2y_1 + y_2 + y_3 = 8 \\ y_1 + 2y_2 + y_4 = 7 \\ 0 \leq y_1 \leq +\infty,\ 0 \leq y_2 \leq 3,\ 0 \leq y_3 \leq +\infty,\ 0 \leq y_4 \leq +\infty. \end{cases}$$

Considérons la base $B = I_2$ associée au système de variables $\{y_3, y_4\}$. En prenant des variables hors base nulle (*i. e.* $y_1 = y_2 = 0$), on saisit la solution de base $y = (0, 0, 8, 7)$. Par contre, en choisissant $y_1 = 0$ et $y_2 = 3$, on obtient $y = (0, 3, 5, 1)$. Il est facile de constater que ces points sont tous deux réalisables et que chacun est une solution de base de la même matrice $B = I_2$. D'une façon générale, une solution de base est entièrement définie par la donnée des variables de base et la valeur de chaque variable hors base y_i, $i \in J_N$. Cette dernière doit être égale à un nombre fini choisi parmi les bornes l_i et u_i. Pour un (PL) à variables bornées, un tableau simplexe doit comporter, en sus des éléments habituels, les valeurs des variables hors base. Dans le contexte de ce paragraphe, un tableau simplexe se présente de la manière suivante :



Dans ce tableau, le vecteur y_B peut dépendre du vecteur y_N. D'après l'égalité (4.3), on a $y_B = B^{-1}b - B^{-1}Ny_N$, celui-ci vaut $y_B = B^{-1}b$ au cas où $y_N = 0_N$. Pour aboutir à l'algorithme du simplexe relatif aux

(PL) à variables bornées, deux résultats seront établis. Le premier fournit une condition suffisante d'optimalité. Le second permet de construire, à partir d'une solution de base non optimale, une nouvelle solution de base dotée d'une meilleure valeur d'objectif.

Théorème 4.3.1 *Soit* $y^{(0)} = \binom{y_B^{(0)}}{y_N^{(0)}}$ *une solution de base réalisable et* w_N^* *le vecteur des coûts réduits associé. Considérons les deux ensembles disjoints* $L = \{j \in J_N / y_j = l_j\}$ *et* $U = \{j \in J_N / y_j = u_j\}$. *Alors, on a le résultat suivant :*

$$\left\{\begin{array}{l} w_L^* \leq 0_L^* \\ w_U^* \geq 0_U^* \end{array}\right. \Longrightarrow y^{(0)} \text{ est une solution optimale.}$$

Ici, w_L^* *et* w_U^* *désignent respectivement la restriction du vecteur* w_N^* *à* L *et* U.

Démonstration. Tout d'abord, l'hypothèse $l_i < u_i$ assure que les deux ensembles L et U sont disjoints. Aussi, la condition $(l_i, u_i) \neq (-\infty, +\infty)$ entraîne à fortiori que $L \cup U = J_N$. Considérons maintenant un point réalisable $y = \binom{y_B}{y_N}$ arbitraire. Ce point vérifie entre autres les conditions :

$$l_N \leq y_N \leq u_N \text{ et } y_B = B^{-1}b - B^{-1}Ny_N.$$

En décomposant J_N selon la partition L et U, on obtient :

$$y_N = \begin{pmatrix} y_L \\ y_U \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_L^{(0)} + (y_L - y_L^{(0)}) \\ y_U^{(0)} - (y_U^{(0)} - y_U) \end{pmatrix} = y_N^{(0)} + \begin{pmatrix} +(y_L - y_L^{(0)}) \\ -(y_U^{(0)} - y_U) \end{pmatrix}.$$

Selon la définition de L et U, il est clair que $y_L^{(0)} = l_L$ et $y_U^{(0)} = u_U$. D'où

$$y_N = y_N^{(0)} + y_N^{(e)} \text{ avec } y_N^{(e)} = \begin{pmatrix} +(y_L - l_L) \\ -(u_U - y_U) \end{pmatrix}.$$

Le vecteur $y_N^{(e)}$ désigne l'écart entre y_N et $y_N^{(0)}$. Compte tenu de l'expression de y_B et de y_N, la valeur de la fonction d'objectif Z au point réalisable y vaut :

$$\begin{aligned} Z(y) &= c_B^* y_B + c_N^* y_N \\ &= c_B^*[B^{-1}b - B^{-1}Ny_N] + c_N^* y_N \\ &= c_B^*[B^{-1}b - B^{-1}Ny_N^{(0)} - B^{-1}Ny_N^{(e)}] + c_N^*[y_N^{(0)} + y_N^{(e)}] \\ &= c_B^*[B^{-1}b - B^{-1}Ny_N^{(0)}] + c_N^* y_N^{(0)} + [c_N^* - c_B^* B^{-1}N]y_N^{(e)}. \end{aligned}$$

Grâce à l'égalité $B^{-1}b - B^{-1}Ny_N^{(0)} = y_B^{(0)}$, on obtient :

$$\begin{aligned} Z(y) &= c_B^* y_B^{(0)} + c_N^* y_N^{(0)} + [c_N^* - c_B^* B^{-1} N] y_N^{(e)} \\ &= Z(y^{(0)}) + [c_N^* - c_B^* B^{-1} N] y_N^{(e)}. \end{aligned}$$

La dernière égalité découle immédiatement de l'expression $Z(y^{(0)}) = c_B^* y_B^{(0)} + c_N^* y_N^{(0)}$. Sans perte de généralité, on suppose que le problème (4.2) est de type maximisation. Dans ce cas, le vecteur des coûts réduits s'identifie à $w_N^* = c_N^* - c_B^* B^{-1} N$. De la dernière égalité établie sur le terme $Z(y)$ et compte tenu de l'expression de $y_N^{(e)}$, il en découle ce qui suit :

$$\begin{aligned} Z(y) &= Z(y^{(0)}) + w_N^* y_N^{(e)} \\ &= Z(y^{(0)}) + w_L^*(y_L - l_L) - w_U^*(u_U - y_U) \end{aligned} \tag{4.4}$$

Puisque y est réalisable, on a forcément $y_L - l_L \geq 0_L$ et $u_U - y_U \geq 0_U$. D'après l'égalité (4.4), la valeur $Z(y)$ devient majorée par $Z(y^{(0)})$ au cas où les deux conditions $w_L^* \leq 0_L^*$ et $w_U^* \geq 0_U^*$ sont satisfaites.

□

Maintenant, on suppose que la solution de base réalisable $y^{(0)}$ ne vérifie pas la condition d'optimalité "$w_L^* \leq 0_L^*$ et $w_U^* \geq 0_U^*$". Autrement dit, il existe une coordonnée $s \in J_N$ telle que "$w_s > 0$ et $s \in L$" ou "$w_s < 0$ et $s \in U$". Dans un premier cas, nous supposons que la condition "$w_s > 0$ et $s \in L$" est vérifiée. Dans ces circonstances, il est certain que $(y_N)_s = (l_N)_s$. A partir de $y^{(0)}$, une nouvelle solution de base réalisable, notée $y^{(1)}$, sera construite. Cette solution doit être conçue de sorte qu'elle possède une meilleure valeur d'objectif. Tirant profit de l'égalité (4.4), une valeur positive λ sera incrémentée à la composante y_s de $y^{(0)}$. Afin que $y^{(1)}$ soit réalisable, il faut absolument que le paramètre λ soit au plus égal à

$$\lambda_s = u_s - l_s.$$

Par ailleurs, la transformation $y_s \leftarrow y_s + \lambda$ a pour conséquence de changer $y_B^{(0)}$ en $y_B^{(1)} = y_B^{(0)} - \lambda\gamma$, où $\gamma = B^{-1}N_s$. Les contraintes sur les variables

bornées exigent que $y_B^{(1)}$ vérifie :

$$(l_B)_i \leq (y_B^{(1)})_i = (y_B^{(0)})_i - \lambda\gamma_i \leq (u_B)_i,\ \forall i \in \{1,\dots,m\}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \lambda\gamma_i \leq (y_B^{(0)})_i - (l_B)_i \\ -\lambda\gamma_i \leq (u_B)_i - (y_B^{(0)})_i \end{cases} \forall i \in \{1,\dots,m\}.$$

Par hypothèse, le point $y^{(0)}$ est réalisable. Ainsi, les inégalités $\lambda\gamma_i \leq (y_B^{(0)})_i - (l_B)_i$ sont assurées pour tout indice i vérifiant $\gamma_i \leq 0$. De même, si $\gamma_i \geq 0$ l'inégalité $-\lambda\gamma_i \leq (u_B)_i - (y_B^{(0)})_i$ est satisfaite. De cette façon, l'ensemble d'indexation $\{1,\dots,m\}$ peut être restreint :

$$(l_B)_i \leq (y_B^{(1)})_i = (y_B^{(0)})_i - \lambda\gamma_i \leq (u_B)_i,\ \forall i \in \{1,\dots,m\}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \lambda \leq \frac{(y_B^{(0)})_i-(l_B)_i}{\gamma_i},\ \forall i \,/\, \gamma_i > 0 \\ \lambda \leq \frac{(u_B)_i-(y_B^{(0)})_i}{-\gamma_i},\ \forall i \,/\, \gamma_i < 0 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \lambda \leq \lambda_l = \min\{\frac{(y_B^{(0)})_i-(l_B)_i}{\gamma_i} \,/\, \gamma_i > 0\} \\ \lambda \leq \lambda_u = \min\{\frac{(u_B)_i-(y_B^{(0)})_i}{-\gamma_i} \,/\, \gamma_i < 0\}. \end{cases}$$

Pour que la nouvelle solution $y^{(1)}$ soit réalisable, il est indispensable que le paramètre λ vérifie $\lambda \leq \min\{\lambda_s, \lambda_l, \lambda_u\}$. Mais en prenant $\lambda = \min\{\lambda_s, \lambda_l, \lambda_u\}$, le point admissible $y^{(1)}$ devient une solution de base. Si $\lambda = \lambda_s$, la base associée est identique à $y^{(0)}$. Par contre, au cas où $\lambda \in \{\lambda_l, \lambda_u\}$, la base associée devient la matrice B', obtenue en remplaçant dans B la colonne B_r par N_s. L'entier r étant l'indice pour lequel le minimum λ est atteint. En particulier, lorsque $\lambda = \lambda_u$ la variable sortante atteint sa borne supérieure. D'après l'égalité (4.4), la nouvelle solution de base $y^{(1)}$ admet comme valeur d'objectif $Z(y^{(1)}) = Z(y^{(0)}) + \lambda w_s$. Puisque λ et w_s sont tous deux positifs, il est clair que $Z(y^{(1)}) \geq Z(y^{(0)})$. Si le problème étudié est de type minimisation, le vecteur des coûts réduits sera défini par $w_N^* = c_B^* B^{-1} N - c_N^*$. En se référant à la démonstration du théorème précédent, il est impératif de modifier l'égalité (4.4) par $Z(y) = Z(y^{(0)}) - w_L^*(y_L - l_L) + w_U^*(u_U - y_U)$. De cette manière, le point réalisable $y^{(1)}$ aura comme valeur d'objectif $Z(y^{(1)}) = Z(y^{(0)}) - \lambda w_s$, qui est effectivement inférieure à $Z(y^{(0)})$. Assurément, c'est ce que l'on souhaite pour un problème de minimisation.

Examinons maintenant le deuxième cas à savoir "$w_s < 0$ et $s \in U$". Forcément l'indice s vérifie $(y_N)_s = (u_N)_s$. Pour construire $y^{(1)}$, la va-

bornées exigent que $y_B^{(1)}$ vérifie :

$$(l_B)_i \leq (y_B^{(1)})_i = (y_B^{(0)})_i - \lambda\gamma_i \leq (u_B)_i, \ \forall i \in \{1,\ldots,m\}$$

$$\iff \begin{cases} \lambda\gamma_i \leq (y_B^{(0)})_i - (l_B)_i \\ -\lambda\gamma_i \leq (u_B)_i - (y_B^{(0)})_i \end{cases} \quad \forall i \in \{1,\ldots,m\}.$$

Par hypothèse, le point $y^{(0)}$ est réalisable. Ainsi, les inégalités $\lambda\gamma_i \leq (y_B^{(0)})_i - (l_B)_i$ sont assurées pour tout indice i vérifiant $\gamma_i \leq 0$. De même, si $\gamma_i \geq 0$ l'inégalité $-\lambda\gamma_i \leq (u_B)_i - (y_B^{(0)})_i$ est satisfaite. De cette façon, l'ensemble d'indexation $\{1,\ldots,m\}$ peut être restreint :

$$(l_B)_i \leq (y_B^{(1)})_i = (y_B^{(0)})_i - \lambda\gamma_i \leq (u_B)_i, \ \forall i \in \{1,\ldots,m\}$$

$$\iff \begin{cases} \lambda \leq \frac{(y_B^{(0)})_i - (l_B)_i}{\gamma_i}, \ \forall i \ / \ \gamma_i > 0 \\ \lambda \leq \frac{(u_B)_i - (y_B^{(0)})_i}{-\gamma_i}, \ \forall i \ / \ \gamma_i < 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \lambda \leq \lambda_l = \min\{\frac{(y_B^{(0)})_i - (l_B)_i}{\gamma_i} \ / \ \gamma_i > 0\} \\ \lambda \leq \lambda_u = \min\{\frac{(u_B)_i - (y_B^{(0)})_i}{-\gamma_i} \ / \ \gamma_i < 0\}. \end{cases}$$

Pour que la nouvelle solution $y^{(1)}$ soit réalisable, il est indispensable que le paramètre λ vérifie $\lambda \leq \min\{\lambda_s, \lambda_l, \lambda_u\}$. Mais en prenant $\lambda = \min\{\lambda_s, \lambda_l, \lambda_u\}$, le point admissible $y^{(1)}$ devient une solution de base. Si $\lambda = \lambda_s$, la base associée est identique à $y^{(0)}$. Par contre, au cas où $\lambda \in \{\lambda_l, \lambda_u\}$, la base associée devient la matrice B', obtenue en remplaçant dans B la colonne B_r par N_s. L'entier r étant l'indice pour lequel le minimum λ est atteint. En particulier, lorsque $\lambda = \lambda_u$ la variable sortante atteint sa borne supérieure. D'après l'égalité (4.4), la nouvelle solution de base $y^{(1)}$ admet comme valeur d'objectif $Z(y^{(1)}) = Z(y^{(0)}) + \lambda w_s$. Puisque λ et w_s sont tous deux positifs, il est clair que $Z(y^{(1)}) \geq Z(y^{(0)})$. Si le problème étudié est de type minimisation, le vecteur des coûts réduits sera défini par $w_N^* = c_B^* B^{-1} N - c_N^*$. En se référant à la démonstration du théorème précédent, il est impératif de modifier l'égalité (4.4) par $Z(y) = Z(y^{(0)}) - w_L^*(y_L - l_L) + w_U^*(u_U - y_U)$. De cette manière, le point réalisable $y^{(1)}$ aura comme valeur d'objectif $Z(y^{(1)}) = Z(y^{(0)}) - \lambda w_s$, qui est effectivement inférieure à $Z(y^{(0)})$. Assurément, c'est ce que l'on souhaite pour un problème de minimisation.

Examinons maintenant le deuxième cas à savoir "$w_s < 0$ et $s \in U$". Forcément l'indice s vérifie $(y_N)_s = (u_N)_s$. Pour construire $y^{(1)}$, la va-

riable hors base $(y_N)_s$ sera décrémentée d'une valeur positive λ, qui est au plus égale à $\lambda_s = (u_N)_s - (l_N)_s$. Cette décrémentation a pour effet de modifier $y_B^{(0)}$ en $y_B^{(1)} = y_B^{(0)} + \lambda\gamma$. Le même raisonnement que précédemment conduit au résultat suivant :

$$y^{(1)} \text{ est réalisable} \Longleftrightarrow \begin{cases} 0 \leq \lambda \leq \lambda_s = (u_N)_s - (l_N)_s \\ \lambda \leq \lambda_l = \min\{\frac{(y_B)_i - (l_B)_i}{-\gamma_i} \ / \ \gamma_i < 0\} \\ \lambda \leq \lambda_u = \min\{\frac{(u_B)_i - (y_B)_i}{\gamma_i} \ / \ \gamma_i > 0\}. \end{cases}$$

On prend $\lambda = \min\{\lambda_s, \lambda_l, \lambda_u\}$ afin que $y^{(1)}$ soit une solution de base réalisable. D'après l'égalité (4.4), la nouvelle valeur d'objectif vaut $Z(y^{(1)}) = Z(y^{(0)}) - \lambda w_s$, elle est bien entendu supérieure à $Z(y^{(0)})$ puisque $w_s < 0$ et $\lambda \geq 0$. Tous les résultats sur l'amélioration de la fonction d'objectif peuvent être récapitulés dans le théorème suivant.

Théorème 4.3.2 *Soit $y = \binom{y_B}{y_N}$ une solution de base réalisable où le vecteur des coûts réduits w_N^* ne vérifie pas la condition d'optimalité "$w_L^* \leq 0_L^*$ et $w_U^* \leq 0_U^*$".*

⋆ *S'il existe un indice $s \in L$ tel que $w_s > 0$, on incrémente $(y_N)_s$ de la valeur positive $\lambda = \min\{\lambda_s, \lambda_l, \lambda_u\}$, avec*

$$\begin{cases} \lambda_s = (u_N)_s - (l_N)_s \\ \lambda_l = \min\{\frac{(y_B^{(0)})_i - (l_B)_i}{\gamma_i} \ / \ \gamma_i > 0\} \\ \lambda_u = \min\{\frac{(u_B)_i - (y_B^{(0)})_i}{-\gamma_i} \ / \ \gamma_i < 0\}. \end{cases}$$

- *Si $\lambda = \lambda_s$, la base demeure inchangée.*
- *Sinon (i. e. $\lambda = \lambda_l$ ou $\lambda = \lambda_u$), la variable de base $(y_B)_r$ sort de la base pour être remplacée par $(y_N)_s$. L'entier r étant un indice pour lequel le minimum λ est atteint.*

Dans les deux cas, la nouvelle solution de base est définie comme suit :

$$y_B \leftarrow y_B - \lambda\gamma \text{ et } y_N \leftarrow y_N + \lambda e_s.$$

Ici e_s représente le $s^{\text{ième}}$ vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^{n-m}$ et $\gamma = B^{-1}N_s$. La nouvelle valeur d'objectif sera calculée à travers la formule :

$$Z \leftarrow \begin{cases} Z + \lambda w_s & \text{si "max"} \\ Z - \lambda w_s & \text{si "min"}. \end{cases}$$

⋆ *S'il existe un indice $s \in U$ tel que $w_s < 0$, on diminue $(y_N)_s$ de la valeur positive $\lambda = \min\{\lambda_s, \lambda_l, \lambda_u\}$, avec*

$$\begin{cases} \lambda_s = (u_N)_s - (l_N)_s \\ \lambda_l = \min\{\frac{(y_B^{(0)})_i - (l_B)_i}{-\gamma_i} \ / \ \gamma_i < 0\} \\ \lambda_u = \min\{\frac{(u_B)_i - (y_B^{(0)})_i}{\gamma_i} \ / \ \gamma_i > 0\}. \end{cases}$$

- *Si $\lambda = \lambda_s$, la base demeure inchangée.*
- *Sinon (i. e. $\lambda = \lambda_l$ ou $\lambda = \lambda_u$), la variable de base $(y_B)_r$ sort de la base pour être remplacée par $(y_N)_s$.*

Dans les deux cas, la nouvelle solution de base est définie comme suit :

$$y_B \leftarrow y_B + \lambda\gamma \text{ et } y_N \leftarrow y_N - \lambda e_s.$$

La nouvelle valeur d'objectif sera calculée à travers la formule :

$$Z \leftarrow \begin{cases} Z - \lambda w_s & \text{si "max"} \\ Z + \lambda w_s & \text{si "min".} \end{cases}$$

□

Dans le cas où la solution de base réalisable en cours ne vérifie pas la condition d'optimalité, le choix de w_s est souvent multiple. La règle du meilleur coût marginal conduit à retenir l'élément

$$w_s = \begin{cases} w_{s_l} & \text{si } w_{s_l} > -w_{s_u} \\ w_{s_u} & \text{sinon,} \end{cases}$$

où

$$w_{s_l} = \max\{w_j \ / \ j \in L, \ w_j > 0\} \text{ et } w_{s_u} = \min\{w_j \ / \ j \in U, \ w_j < 0\}.$$

Avec la convention $\min \emptyset = +\infty$, il est possible que l'un des trois paramètres λ_s, λ_l et λ_s soit infini. De toute façon, le plus petit d'entre eux sera retenu, il s'agit en effet du paramètre λ. Mais dans le cas où tous les paramètres λ_s, λ_l et λ_s sont infinis, cela entraîne que l'optimum du problème considéré est infini. Enfin, lorsque la base est modifiée (*i. e.* $\lambda \in \{\lambda_l, \lambda_u\}$), les formules itératives régissant la matrice $\beta = B^{-1}N$ et le vecteur w_N^* restent valables pour les formes standards à variables bornées.

Exemple 18 Ecrire le (PL) de l'Exemple 1 sous forme standard à variables bornées, puis le résoudre par l'algorithme du simplexe généralisé.

La forme standard à variables bornées de l'Exemple 1 est la suivante :

$$\begin{cases} \max[Z(y_1, y_2, y_3, y_4) = 4y_1 + 5y_2] \\ 2y_1 + y_2 + y_3 = 8 \\ y_1 + 2y_2 + y_4 = 7 \\ 0 \leq y_1 \leq +\infty,\ 0 \leq y_2 \leq 3,\ 0 \leq y_3 \leq +\infty,\ 0 \leq y_4 \leq +\infty. \end{cases}$$

Il est clair que la matrice $B = I_2$ est une base réalisable.

<u>Itération 1</u>

y_1	y_2		
0	0		
2	1	8	y_3
1	2	7	y_4
4	5	0	

Pour cette itération, on a $L = \{1, 2\}$ et $U = \emptyset$ et par conséquent $w_N^* = w_L^*$. Le plus grand élément de w_N^* est $w_s = 5$. D'où :

$$\lambda_s = 3 - 0 = 3,\ \lambda_l = \min\{\frac{8-0}{1}, \frac{7-0}{2}\} = \frac{7}{2} \text{ et } \lambda_u = \min \emptyset = +\infty.$$

Le plus petit élément parmi ces trois paramètres est $\lambda = \lambda_s = 3$. A l'itération d'après, la base B reste inchangée mais la variable hors base y_2 sera incrémentée de $\lambda = 3$, ce qui induit la transformation $y_B \leftarrow y_B - \lambda\gamma$.

<u>Itération 2</u>

y_1	y_2		
0	3		
2	1	5	y_3
1	2	1	y_4
4	5	15	

La partition de N devient $L = \{1\}$ et $U = \{2\}$. On a $w_U = 5 \geq 0$ mais $w_L = 4 \nleq 0$, et par suite $w_s = 4$. D'où :

$$\lambda_s = +\infty - 0 = +\infty,\ \lambda_l = \min\{\frac{5-0}{2}, \frac{1-0}{1}\} = 1 \text{ et } \lambda_u = \min \emptyset = +\infty.$$

Alors, le paramètre $\lambda = \min\{\lambda_s, \lambda_l, \lambda_u\}$ vaut $\lambda = \lambda_l = 1$. Ainsi, la variable y_1 entre dans la base, affectée de la valeur $\lambda = 1$, et y_4 quitte cette base.

Itération 3

y_4	y_2		
0	3		
-2	$\mathbf{-3}$	3	y_3
1	2	1	y_1
-4	$\mathbf{-3}$	19	

Les ensembles L et U sont respectivement $\{4\}$ et $\{2\}$. Concernant le vecteur des coûts réduits, on a $w_L = -4 \leq 0$ et $w_U = -3 \not\geq 0$. Alors, on prend $w_s = -3$ et on diminue la valeur de la variable hors base y_2, puisque $s \in U$. Les données qui permettent de calculer λ sont :

$$\lambda_s = 3 - 0 = 3,\ \lambda_l = \min\{\frac{3-0}{-(-3)}\} = 1 \text{ et } \lambda_u = \min\{\frac{+\infty - 1}{2}\} = +\infty.$$

Ainsi, la variable y_2 entre dans le système de base avec la valeur $3 - \lambda = 2$, et y_3 quitte ce système de base. Pour le vecteur y_B, il subit la transformation $y_B \leftarrow y_B + \lambda\gamma$.

Itération 4

y_4	y_3		
0	0		
		2	y_2
		3	y_1
-2	-1	22	

Pour cette itération, on a $L = N$ et $w_N^* = (-2 \quad -1) \leq 0_N^*$, ce qui permet d'affirmer que $(3,2)$ est une solution optimale, qui réalise une valeur maximale égale à $Z(3,2) = 22$.

Exemple 19 Résoudre le (PL) suivant en utilisant l'algorithme du simplexe généralisé.

$$\begin{cases} \max[Z(x_1,x_2) = x_1 + 2x_2] \\ -x_1 + x_2 \leq 1 \\ -x_1 + 2x_2 \leq 4 \\ x_1 \geq 0,\ 0 \leq x_2 \leq 5. \end{cases}$$

La forme standard à variables bornées est :

$$\begin{cases} \max[Z(y_1,y_2,y_3,y_4) = y_1 + 2y_2] \\ -y_1 + y_2 + y_3 = 1 \\ -y_1 + 2y_2 + y_4 = 4 \\ 0 \leq y_1 \leq +\infty,\ 0 \leq y_2 \leq 5,\ 0 \leq y_3 \leq +\infty,\ 0 \leq y_4 \leq +\infty. \end{cases}$$

Itération 1

y_1	y_2		
0	0		
-1	1	1	y_3
-1	2	4	y_4
1	2	0	

$$\lambda_s = 5,\ \lambda_l = \min\{\tfrac{1}{1}, \tfrac{4}{2}\} = 1,\ \lambda_u = \min \emptyset = +\infty$$
$$\lambda = \min\{\lambda_s, \lambda_l, \lambda_u\} = 1$$

Itération 2

y_1	y_3		
0	0		
-1	1	1	y_2
1	-2	2	y_4
3	-2	2	

$$\lambda_s = +\infty,\ \lambda_l = \min\{\tfrac{2}{1}\} = 2,\ \lambda_u = \min\{\tfrac{5-1}{-(-1)}\} = 4$$
$$\lambda = \min\{\lambda_s, \lambda_l, \lambda_u\} = 2$$

Itération 3

y_4	y_3		
0	0		
1	-1	3	y_2
1	-2	2	y_1
-3	4	8	

$$\lambda_s = +\infty,\ \lambda_l = \min \emptyset = +\infty,\ \lambda_u = \min\{\tfrac{5-3}{-(-1)}, \tfrac{+\infty-2}{-(-1)}\} = 2$$
$$\lambda = \min\{\lambda_s, \lambda_l, \lambda_u\} = 2$$

Itération 4

y_4	y_2		
0	5		
-1	-1	2	y_3
-1	-2	6	y_1
1	4	16	

$$\lambda_s = +\infty,\ \lambda_l = \min \emptyset = +\infty,\ \lambda_u = \min\{\tfrac{+\infty-2}{-(-1)}, \tfrac{+\infty-6}{-(-1)}\} = +\infty$$
$$\lambda = \min\{\lambda_s, \lambda_l, \lambda_u\} = +\infty$$

Le paramètre λ étant infini, le problème considéré admet un optimum infini. D'après le dernier tableau simplexe, la famille de points $y_\lambda =$

$(6+\lambda, 5, 2+\lambda, \lambda)$; $\lambda \geq 0$; est réalisable pour la forme standard à variables bornées. De plus, on a :

$$Z(y_\lambda) = 16 + \lambda \xrightarrow{\lambda \to +\infty} +\infty, \text{ et par suite } \sup_{y \in \mathcal{Y}} Z(y) = +\infty.$$

Pour le (PL) initial, tout point de la forme $x_\lambda = (6+\lambda, 5)$, avec $\lambda \geq 0$, est réalisable. Cette famille de solutions réalisables vérifie $Z(x_\lambda) = 16 + \lambda$, celle-ci tend vers l'infini lorsque λ augmente indéfiniment. Noter que cette conclusion pouvait être établie dès la première itération. Le choix de $w_s = 1$ à la place de $w_s = 2$ aboutit à cette finalité.

Naturellement, l'algorithme du simplexe généralisé peut être exécuté sur une forme standard ordinaire. Dans ce cas, les bornes inférieures l_i sont nulles et les bornes supérieures sont infinies. De ce fait, le paramètre λ_s est toujours infini, et à chaque itération l'ensemble U est vide. Alors, le paramètre λ vaut exactement λ_l et w_L^* s'identifie à w_N^*. Dans ces circonstances, l'algorithme du simplexe généralisé aura les mêmes tableaux et les mêmes itérations que l'algorithme du simplexe standard.

4.4 Méthode du simplexe révisée

Pour la résolution de larges problèmes de programmation linéaire, la méthode du simplexe révisée est souvent utilisée. Cette technique fait intervenir juste les éléments nécessaires qui permettent à l'algorithme du simplexe de s'exécuter. A travers les exemples précédents, on peut remarquer que la matrice $B^{-1}N$ n'intéresse le simplexe que par le vecteur $\gamma = B^{-1}N_s$. De ce fait, la méthode du simplexe révisée n'exige nullement la détermination toute entière de la matrice $B^{-1}N$. Seule la colonne $\gamma = B^{-1}N_s$, relative au choix de l'élément w_s retenu, est calculée. Bien sûr, à chaque itération le calcul du vecteur des coûts réduits w_N^* est nécessaire pour juger l'optimalité, ainsi que la solution de base $y_B = B^{-1}b$ et la valeur d'objectif $Z = c_B^* y_B$.

Par ailleurs, étant donnée que la matrice $B^{-1}N$ n'est pas mise en jeu par la méthode du simplexe révisée, les formules itératives qui permettent de déterminer $w_{N'}^*$ via w_N^* ne peuvent plus être appliquées. D'où le besoin de calculer à chaque itération la matrice inverse B^{-1}. Vu le peu

de différence entre la base B et la base qui suit B', nous allons voir qu'il est possible de déduire B'^{-1} à partir de B^{-1}.

On garde les mêmes notations que le Chapitre 2, à savoir

$$B = (B_1, \ldots, B_m) \ ; \ N = (N_1, \ldots, N_p) \ ;$$
$$B' = (B_1, \ldots, B_{r-1}, N_s, B_{r+1}, \ldots, B_m)$$

et

$$N' = (N_1, \ldots, N_{s-1}, B_r, N_{s+1}, \ldots, N_p).$$

On a $\gamma = B^{-1}N_s$. Alors, on obtient :

$$\gamma = B^{-1}N_s \Longleftrightarrow B\gamma = N_s.$$

D'autre part, on a :

$$Be_i = B_i, \ \forall i = 1, \ldots, m \text{ et } i \neq r.$$

Les deux dernières égalités se traduisent matriciellement par :

$$BE = B' \text{ avec } E = \begin{pmatrix} 1 & & \gamma_1 & & \\ & \ddots & \vdots & & \\ & & \gamma_r & & \\ & & \vdots & \ddots & \\ & & \gamma_m & & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_r \\ \vdots \\ \gamma_m \end{pmatrix} = \gamma.$$

On montre facilement que la matrice E est inversible et que

$$E^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & -\frac{\gamma_1}{\gamma_r} & & \\ & \ddots & \vdots & & \\ & & \frac{1}{\gamma_r} & & \\ & & \vdots & \ddots & \\ & & -\frac{\gamma_m}{\gamma_r} & & 1 \end{pmatrix}.$$

Enfin, on conclut que

$$B'^{-1} = E^{-1}B^{-1}. \tag{4.5}$$

On appelle parfois la matrice E^{-1}, **matrice de pivotage**. L'élément diagonal γ_r est le pivot β_{rs}. L'égalité matricielle $B'^{-1} = E^{-1}B^{-1}$ résume les opérations à effectuer sur les lignes de B^{-1} afin d'obtenir la matrice

inverse B'^{-1}. Plus précisément, la ligne du pivot doit être multipliée par l'inverse du pivot $\frac{1}{\gamma_r}$. Chaque ligne i, pour $i \neq r$, s'obtient en retranchant à la ligne i de B^{-1} le multiple $\frac{\gamma_i}{\gamma_r}$ de la ligne du pivot :

$$\begin{cases} B'^{-1}_{r\bullet} = \frac{1}{\gamma_r} B^{-1}_{r\bullet} \\ B'^{-1}_{i\bullet} = B^{-1}_{i\bullet} - \frac{\gamma_i}{\gamma_r} B^{-1}_{r\bullet}, \; i = 1, \ldots, m \text{ et } i \neq r. \end{cases}$$

L'élément $B^{-1}_{i\bullet}$ désigne la $i^{\text{ième}}$ ligne de la matrice B^{-1}. Bien entendu, le calcul de B'^{-1} via ces relations vectorielles n'exige nullement le stockage en mémoire de la matrice de pivotage E^{-1}.

Revenons maintenant au calcul du vecteur des coûts réduits $w^*_{N'}$. Celui-ci ne sera pas déduit de son prédécesseur w^*_N. Il est calculé directement à partir de son expression $w^*_{N'} = \pm[c^*_{N'} - c^*_{B'} B'^{-1} N']$ une fois la matrice B'^{-1} déterminée. Dans cette perspective, nous allons procéder comme suit :

⋆ calculer tout d'abord le vecteur ligne $\pi'^* = c^*_{B'} B'^{-1}$. Ce dernier s'appelle vecteur des **multiplicateurs du simplexe**,

⋆ calculer ensuite $w^*_{N'} = \pm[c^*_{N'} - \pi'^* N']$.

Il est bien connu que le produit matriciel est associatif. Le calcul de $(c^*_{B'} B'^{-1}) N'$ par la technique décrite ci-dessus demande $(m+p)$ produits scalaires, alors que la détermination de ce même vecteur dans l'ordre de calcul $B'^{-1}N'$ puis $c^*_{B'}(B'^{-1}N')$ exige en totalité $p(m+1)$ produits scalaires. Il existe une autre alternative pour la détermination de $w^*_{N'}$. Celui-ci peut, en effet, être calculé par le biais de w^*_N et la ligne du pivot de la matrice $\beta = B^{-1}N$. Pour ce faire, on procède de la manière suivante :

⋆ calculer le vecteur ligne $\beta_{r\bullet} = B^{-1}_{r\bullet} N$,

⋆ utiliser le Théorème 2.4.2 :

$$\begin{cases} w_s \leftarrow -\frac{w_s}{\beta_{rs}} \\ w_j \leftarrow w_j + w_s \beta_{rj} \text{ pour } j \neq s. \end{cases}$$

En ce qui concerne la solution de base $y_{B'} = B'^{-1}b$, compte tenu de l'égalité $B'^{-1} = E^{-1}B^{-1}$, on obtient $B'^{-1}b = E^{-1}(B^{-1}b)$, ce qui entraîne :

$$(B'^{-1}b)_i = \begin{cases} (B^{-1}b)_i - \frac{\gamma_i}{\gamma_r}(B^{-1}b)_r & \text{si } i \neq r \\ \frac{(B^{-1}b)_r}{\gamma_r} & \text{si } i = r. \end{cases}$$

Puisque le minimum λ est atteint au niveau de l'indice r, il vaut exactement $(B^{-1}b)_r/\gamma_r$ et par conséquent :

$$(B'^{-1}b)_i = \begin{cases} (B^{-1}b)_i - \lambda\gamma_i & \text{si } i \neq r \\ \lambda & \text{si } i = r. \end{cases}$$

Cette formule coïncide parfaitement avec le résultat déjà établi dans le Chapitre 2. De plus, les relations itératives liant le vecteur colonne $B'^{-1}b$ à son prédécesseur $B^{-1}b$ sont identiques aux celles régissant n'importe quelle colonne de B'^{-1}. Au cours de l'implémentation sur machine, il est tout à fait naturel de définir un tableau qui contient à la fois B^{-1} et $B^{-1}b$. Ce tableau, qui sera noté K, est de dimension $(m, m+1)$.

La méthode du simplexe révisée est généralement utilisée pour résoudre des problèmes ayant un nombre de variables hors base qui dépassent largement le nombre de variables de base. La raison à cela est double : premièrement, il exige moins d'allocation mémoire sur machine (à la place de $B^{-1}N$, seulement γ, B^{-1} et π^* sont stockés en mémoire) et deuxièmement, les opérations arithmétiques sont moindres. Par conséquent, il est possible de résoudre de large problèmes linéaires en un temps plus réduit que la méthode du simplexe standard.

L'algorithme ci-après résume les opérations à effectuer pour résoudre une forme standard. Pour le calcul du vecteur des coûts réduits, on privilégie la méthode itérative à la méthode directe. Le vecteur w_N^* sera stocké dans un tableau que l'on note τ. En sus de w_N^*, le tableau τ contient la valeur $-Z$ ou Z en fonction de la nature du problème ("max" ou "min"). A la place du vecteur des multiplicateurs du simplexe π^*, on aura besoin de la $r^{\text{ième}}$ ligne de la matrice $\beta = B^{-1}N$. Ce vecteur ligne sera noté par α. Pour le choix de $w_s > 0$, on prend systématiquement l'élément le plus élevé.

Algorithm 4 Algorithme du simplexe révisé

Require: base réalisable B

Initialiser $K = [B^{-1} \;\; B^{-1}b]$, $\tau = [w_N^* \;\; \pm Z]$, *base* et *hbase*

Calculer $ws = \max[\tau(1:p)]$

while $ws > 0$ **do**

déterminer l'indice s pour lequel le maximum ws est atteint

$\gamma = B^{-1}M(hbase(s))$ /* $M(i)$ est la colonne i de M */

if $\gamma \leq 0_{\mathbb{R}^m}$ **then**

optimum infini /* $\begin{cases} \sup_{y\in\mathcal{Y}} Z(y) = +\infty & \text{si "max"} \\ \inf_{y\in\mathcal{Y}} Z(y) = -\infty & \text{si "min"} \end{cases}$ */

exit

else

calculer $\lambda = \min\{\frac{K(i,p+1)}{\gamma(i)}\,;\text{ pour } i = 1,\ldots,m \;/\; \gamma(i) > 0\}$

déterminer l'indice r pour lequel λ est atteint

end if

$\alpha = K(r, 1:m)M(hbase(1:p))$ /* $M(hbase(1:p)) = N$ */

$base(r) \leftrightarrow hbase(s)$

$\tau(s) \leftarrow -\frac{\tau(s)}{\gamma(r)}$

$\tau(j) \leftarrow \tau(j) + \alpha(j) * \tau(s)$, pour $j = 1, \ldots, p+1$ et $j \neq s$

Calculer $ws = \max[\tau(1:p)]$

$K(r, 1:m+1) \leftarrow \frac{K(r,1:m+1)}{\gamma(r)}$

$K(i, 1:m+1) \leftarrow K(i, 1:m+1) - \gamma(i) * K(r, 1:m+1)$, pour $i \neq r$

end while

Optimum vaut $Z = -\tau(p+1)$ si "max" et $Z = \tau(p+1)$ si "min"

Une solution optimale, que l'on note *opty*, est donnée par :

$$\begin{cases} opty(base(1:m)) = K(1:m, m+1) \\ opty(hbase(1:p)) = 0. \end{cases}$$

Exemple 20 Illustrons la méthode du simplexe révisée par le problème de production posé dans le cadre d'une entreprise de fabrication de meubles. Cette entreprise produit et commercialise des bibliothèques, des bureaux, des chaises et des lits. Le tableau ci-après donne les exigences d'une unité de chaque produit en heures de travail, en unités de bois et de métal. Il indique aussi la disponibilité de la matière première et du temps de travail par semaine ainsi que le profit unitaire net pour chaque produit.

	Bibliothèque	Bureau	Chaise	Lit	Disponibilité
Heures	3	2	1	2	225
Bois	4	3	3	4	420
Métal	1	1	1	1	117
Profit unitaire	19	13	12	17	

Naturellement, le but de l'entreprise est de déterminer le plan de fabrication qui permet d'avoir un bénéfice maximal, sachant que tout ce qui est produit est vendu.

Le gain dû à la vente de x_1 bibliothèques, x_2 bureaux, x_3 chaises et x_4 lits vaut

$$Z(x_1, x_2, x_3, x_4) = 19x_1 + 13x_2 + 12x_3 + 17x_4.$$

Les contraintes sur les disponibilités se formulent au terme des inégalités suivantes :

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 \leq 225 \\ 4x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 4x_4 \leq 420 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 117 \end{cases}$$

En résumé, la maximisation du profit de l'entreprise se traduit par le (PL) :

$$\begin{cases} \max[Z(x_1, x_2, x_3, x_4) = 19x_1 + 13x_2 + 12x_3 + 17x_4] \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 \quad \leq 225 \\ 4x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 4x_4 \quad \leq 420 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \quad \leq 117 \\ x_i \geq 0 \text{ pour } i = 1, \ldots, 4. \end{cases}$$

La mise sous forme standard de ce problème aboutit aux données suivantes :

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 3 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{cases} b = \begin{pmatrix} 225 \\ 420 \\ 117 \end{pmatrix} \\ c^* = (19 \;\; 13 \;\; 12 \;\; 17 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0). \end{cases}$$

<u>Itération 1</u>

y_1	y_2	y_3	y_4		
3	2	1	2	225	y_5
4				420	y_6
1				117	y_7
19	13	12	17	$Z = 0$	

Pour la première itération, on a $B^{-1} = I_3$ et $w_N^* = c_N^*$ étant donné que $c_B^* = 0_B^*$. On choisit la plus grande valeur du vecteur w_N^* qui est $w_s = 19$, donc $\gamma = B^{-1}N_s = N_s$ coïncide avec la première colonne de M. D'où :

$$\lambda = \min\{\frac{225}{3} = 75, \frac{420}{4} = 105, \frac{117}{1} = 117\} = 75.$$

L'indice r étant égal à 1, la ligne $\beta_{r\bullet}$ vaut $\beta_{1\bullet} = (3\ 2\ 1\ 2)$.

Itération 2

	y_5	y_2	y_3	y_4		
			$\frac{1}{3}$		75	y_1
			$\frac{5}{3}$		120	y_6
	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	42	y_7
	$-\frac{19}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{17}{3}$	$\frac{13}{3}$	1425	

$$B^{-1} = E^{-1}I_3 = E^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ -\frac{4}{3} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Comme convenu auparavant, on garde la même notation B pour la base réalisable dans toutes les itérations du simplexe ; idem pour la matrice N définie par $M = [B\ N]$. Le coefficient le plus élevé de w_N^* est $w_s = \frac{17}{3}$. L'indice s correspond à la variable hors base y_3. D'où $N_s = M_3$ et par suite :

$$\gamma = B^{-1}M_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ -\frac{4}{3} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 5/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}.$$

Par ailleurs, le paramètre λ et l'indice r seront donnés par :

$$\lambda = \min\{\frac{75}{\frac{1}{3}}, \frac{120}{\frac{5}{3}}, \frac{42}{\frac{2}{3}}\} = 63 \text{ et } r = 3.$$

La ligne du pivot est égale à :

$$\beta_{3\bullet} = B_{3\bullet}^{-1}N = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Itération 3

	y_5	y_2	y_7	y_4		
				$\frac{1}{2}$	54	y_1
	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{5}{2}$	$\frac{1}{2}$	15	y_6
				$\frac{1}{2}$	63	y_3
	$-\frac{7}{2}$	$-\frac{5}{2}$	$-\frac{17}{2}$	$\frac{3}{2}$	1782	

D'après l'égalité (4.5), la matrice inverse de la base réalisable relative à cette itération devient :

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{5}{2} \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ -\frac{4}{3} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{5}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}.$$

La seule valeur strictement positive de w_N^* est $w_s = \frac{3}{2}$. Elle correspond à la variable hors base y_4, ce qui donne :

$$\gamma = B^{-1}M_4 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{5}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Par conséquent, le coefficient λ vaut :

$$\lambda = \min\{\frac{54}{\frac{1}{2}}, \frac{15}{\frac{1}{2}}, \frac{63}{\frac{1}{2}}\} = 30, \text{ et l'indice } r \text{ est égal à } 2.$$

D'où :

$$\begin{aligned} \beta_{2\bullet} &= B^{-1}_{2\bullet}N \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{5}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{5}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Itération 4

	y_5	y_2	y_7	y_6		
					39	y_1
					30	y_4
					48	y_3
	-2	-1	-1	-3	1827	

Le vecteur w_N^* étant négatif, l'optimum de la fonction Z est donc atteint. En conclusion, la stratégie optimale de fabrication consiste à produire 39 bibliothèques, 48 chaises, 30 lits et aucun bureau. Ainsi, le gain optimal vaut 1827.

4.5 Exercices

Exercice 4.5.1 *L'exemple de cyclage proposé par Beale [1].*

$$\begin{cases} \max[Z(x) = -\frac{3}{4}x_1 + 150x_2 - \frac{1}{50}x_3 + 6x_4] \\ \frac{1}{4}x_1 - 60x_2 - \frac{1}{25}x_3 + 9x_4 \leq 0 \\ \frac{1}{2}x_1 - 90x_2 - \frac{1}{50}x_3 + 3x_4 \leq 0 \\ x_3 \leq 1 \\ x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \geq 0_{\mathbb{R}^4}. \end{cases}$$

1) *Résoudre ce (PL) par l'algorithme du simplexe en appliquant la règle du meilleur coût marginal. Si la paramètre λ est atteint pour plusieurs indices, choisir le pivot ayant le plus petit indice r.*
2) *Résoudre le problème en appliquant la règle de Bland et montrer que l'algorithme du simplexe converge.*

Exercice 4.5.2
On considère le (PL) suivant :

$$\begin{cases} \max[Z(x) = x_1 + x_2] \\ 2x_1 - 3x_2 \leq 2 \\ 2x_1 + x_2 \leq 11 \\ -x_1 + x_2 \leq 3 \\ x_1 \leq 4 \\ x_2 \leq 5 \\ x = (x_1, x_2) \geq 0_{\mathbb{R}^2}. \end{cases}$$

1) *Résoudre ce problème par la méthode graphique. Que devient la solution optimale sans la contrainte $x_2 \leq 5$?*
2) *Retrouver la solution optimale en appliquant l'algorithme du simplexe généralisé. Quelle serait la solution du problème si l'inégalité $x_1 \leq 4$ était supprimée de l'ensemble des contraintes ?*
3) *Adapter la méthode du simplexe révisé au cas des variables bornées pour résoudre ce problème.*

Exercice 4.5.3
Une compagnie s'est vue attribuer la tâche de préparer un portefeuille

d'investissement pour une société industrielle. Les fonds disponibles représentent un montant de 250 000DT. L'analyste financier de la compagnie a retenu 6 possibilités d'investissement réparties dans l'industrie de l'agro-alimentaire, de l'électronique et pharmaceutique. Les diverses sociétés dans lesquelles la compagnie désire investir et les rendements anticipés sont représentés dans le tableau ci-après.

Sociétés	Secteur d'activité	Rendement anticipé (%)
S_1	Agro-alimentaire	$9,4$
S_2	Agro-alimentaire	8
S_3	Electronique	$10,9$
S_4	Electronique	$7,8$
S_5	Pharmaceutique	$9,6$
S_6	Pharmaceutique	$8,5$

Les directives suivantes ont été émises :

- *Les investissements dans le secteur pharmaceutique devrait représenter au moins 30% des investissements dans le secteur électronique.*
- *Aucun secteur d'activité ne devrait se voir allouer plus de 55% des fonds disponibles.*
- *Bien que la société S_3 présente un rendement anticipé élevé, la compagnie veut limiter le montant investi dans cette société, à cause de son risque élevé, à 60% des investissements dans le secteur électronique.*
- *On a demandé également à la compagnie d'investir au moins 15 000DT dans l'industrie agro-alimentaire.*

L'objectif de l'analyste financier de la compagnie est de maximiser le rendement anticipé.

1) *Formuler le modèle qui permettrait à l'analyste financier de lui suggérer une stratégie de placement tout en respectant les directives mentionnées.*

2) *Résoudre ce problème par l'algorithme du simplexe et donner la stratégie optimale de placement.*

3) *Résoudre ce même problème par l'algorithme du simplexe généralisé adapté au cas des variables bornées, et le comparer avec l'algorithme standard.*

Exercice 4.5.4
Reprendre les exemples de l'exercice 3.5.1 et les résoudre par l'algorithme du simplexe révisé.

Exercice 4.5.5
On considère le problème suivant :

$$(P)\begin{cases} \max[Z(x) = x_2] \\ 2x_1 + 3x_2 \quad \leq 5 \\ |x_1 - 2| \quad\quad \leq 1 \\ x = (x_1, x_2) \geq 0_{\mathbb{R}^2}. \end{cases}$$

1) a - *Résoudre (P) par la méthode graphique.*
b - *Formuler (P) au terme d'un programme linéaire, puis le résoudre par le simplexe.*
2) *Mêmes questions pour le problème suivant :*

$$(P)\begin{cases} \max[Z(x) = x_2] \\ 2x_1 + 3x_2 \quad \leq 5 \\ |x_1 - 2| \quad\quad \geq 1 \\ x = (x_1, x_2) \geq 0_{\mathbb{R}^2}. \end{cases}$$

Exercice 4.5.6
1) *Ecrire l'algorithme du simplexe généralisé adapté au cas des variables bornées.*
2) *Donner la version révisée de l'algorithme du simplexe généralisé.*

Exercice 4.5.7
On se donne un (PL) qui contient une variable de décision x_i sans restriction de signe. Lors de la mise sous forme standard, le changement de variable $x_i = x_i^+ - x_i^-$, avec $x_i^+ \geq 0$ et $x_i^- \geq 0$, est effectué. Montrer que, à chaque itération du simplexe, la condition $x_i^+ \times x_i^- = 0$ est satisfaite.

Chapitre 5

Programmes linéaires paramétriques

Au stade de la modélisation, l'utilisateur de la programmation linéaire trouve parfois des difficultés pour attribuer des valeurs numériques aux divers coefficients c_j, b_i et a_{ij} du problème. Une fois ces données fixées et l'optimum trouvé, il est naturel d'étudier le comportement de la solution optimale suite à un changement au niveau des données du modèle. La motivation de cette étude serait d'examiner les conséquences des erreurs dans certains coefficients sur la solution optimale. On pourrait s'intéresser aussi à déterminer les limites des changements sur certaines données afin de conserver une stratégie optimale, ou encore à évaluer le changement nécessaire pour basculer à une autre politique optimale.

5.1 Paramétrisation de la fonction économique

On considère un programme linéaire écrit sous forme standard :

$$(\mathrm{FS})\begin{cases} \max\,(\text{ou } \min)[Z(y) = c^* y] \\ My = b \\ y \geq 0_{\mathbb{R}^n}. \end{cases}$$

On se limite dans ce paragraphe à une variation au niveau de la fonction économique. Le vecteur c est supposé être basculé de la valeur c à $\bar{c}(\theta) = c+\theta\xi$, où ξ est un élément fixé de $\mathbb{R}^n$. Dans toute la suite, θ représente un paramètre réel. Ce genre de paramétrisation peut s'imposer lorsque par exemple les gains (ou les coûts) c_i varient selon des facteurs extérieurs

tels que le prix de la matière première, le taux d'intérêt, l'indice de prix, la masse salariale, et ainsi de suite. Le problème paramétrique associé à (FS) est

$$(\text{FSc})\begin{cases} \max\,(\text{ou min})[\bar{Z}_\theta(y) = \bar{c}^*(\theta)y] \\ My = b \\ y \geq 0_{\mathbb{R}^n}. \end{cases}$$

Ce type de paramétrisation n'a aucun effet sur le domaine réalisable. La solution optimale du problème (FS) correspond encore à une solution réalisable de (FSc). Noter également que (FS) coïncide avec (FSc) pour la valeur particulière $\theta = 0$.

Désormais, notre problème de départ (FS) est supposé en possession d'une solution optimale. On aimerait savoir, à présent, de combien le paramètre θ peut être ajusté sans que cette solution optimale soit altérée. Le théorème suivant fournit la réponse à cette question.

Théorème 5.1.1 *Soit B une base optimale que l'on suppose non dégénérée pour le problème (FS) et $y^{(0)} = \binom{B^{-1}b}{0_N}$ la solution de base associée. Par analogie avec le vecteur des coûts réduits w_N^*, on pose $\delta_N^* = \xi_N^* - \xi_B^* B^{-1}N$ (resp. $\delta_N^* = \xi_B^* B^{-1}N - \xi_N^*$) au cas où (FS) est de type maximisation (resp. minimisation). Alors, on a le résultat suivant :*

$$y^{(0)} \text{ est une solution optimale pour (FSc)} \iff \theta_{min} \leq \theta \leq \theta_{max},$$

où

$$\theta_{min} = \max\{\frac{w_j}{-\delta_j}\ ;\ pour\ j = 1, \ldots, p\ /\ \delta_j < 0\}$$

et

$$\theta_{max} = \min\{\frac{-w_j}{\delta_j}\ ;\ pour\ j = 1, \ldots, p\ /\ \delta_j > 0\}.$$

Démonstration. Par hypothèse, la base optimale est non dégénérée. D'après le Théorème 2.3.1, l'inégalité $\bar{w}_N^*(\theta) \leq 0_N^*$ devient une condition nécessaire et suffisante d'optimalité de la base B pour le problème (FSc). Ici, $\bar{w}_N^*(\theta)$ désigne le vecteur des coûts réduits associé à la base réalisable B et relatif au problème (FSc). Puisque $\bar{c}(\theta) = c + \theta\xi$, par linéarité, on obtient $\bar{w}_N^*(\theta) = w_N^* + \theta\delta_N^*$. D'où :

$$\begin{aligned} y^{(0)} \text{ est une solution optimale pour (FSc)} &\iff \bar{w}_N^*(\theta) \leq 0_N^* \\ &\iff w_N^* + \theta\delta_N^* \leq 0_N^*. \end{aligned}$$

Rappelons que la base B est non dégénérée et optimale pour le problème (FS). Alors, le vecteur des coûts réduits w_N^* est nécessairement négatif. D'après ce qui précède, il en découle ce qui suit :

$$\begin{aligned}
& y^{(0)} \text{ est une solution optimale pour (FSc)} \\
\iff\ & w_j + \theta\delta_j \leq 0,\ \forall j \ / \ \delta_j \neq 0, \text{ car pour } \delta_j = 0, \text{ on a bien } w_j \leq 0 \\
\iff\ & \begin{cases} \theta \leq \frac{-w_j}{\delta_j}, & \forall j \ / \ \delta_j > 0 \\ \theta \geq \frac{w_j}{-\delta_j}, & \forall j \ / \ \delta_j < 0. \end{cases}
\end{aligned}$$

Puisque le nombre des indices hors base j est fini, ces deux dernières inégalités sont équivalentes à la condition proposée dans le théorème.

□

Il est facile de vérifier que $\theta_{min} \leq 0 \leq \theta_{max}$. L'intervalle $[\theta_{min}, \theta_{max}]$ n'est donc jamais vide, il est appelé **intervalle de stabilité**. Lorsqu'on fait varier le paramètre θ dans cet intervalle, la solution optimale $y^{(0)} = \binom{B^{-1}b}{0_N}$ du problème (FS) demeure optimale pour (FSc), mais la valeur optimale de la fonction économique sera altérée :

$$\bar{Z}_\theta \leftarrow Z + \theta\xi_B^* B^{-1}b.$$

Par contre, si $\theta \notin [\theta_{min}, \theta_{max}]$, le dernier tableau du simplexe établi lors de la résolution de (FS) peut être exploité pour résoudre le problème (FSc). A cet effet, il suffit de remplacer respectivement le vecteur w_N^* et le réel Z par $\bar{w}_N^*(\theta)$ et $\bar{Z}_\theta$. Les autres éléments de ce dernier tableau, à savoir $B^{-1}N$ et $B^{-1}b$, restent inchangés car la matrice M et le second membre b sont laissés intacts.

Par ailleurs, en se référant au Théorème 2.3.1, la condition de stabilité $\theta \in [\theta_{min}, \theta_{max}]$ reste une condition suffisante d'optimalité en cas de dégénérescence de la base B, sous réserve que cette base vérifie $w_N^* \leq 0_N^*$. Elle est nécessaire dans le cas où la base optimale B est non dégénérée.

Exemple 21 On considère le (PL) suivant :

$$\begin{cases}
\max[Z(x_1, x_2) = x_1 + 3x_2] \\
x_1 + x_2 \leq 14 \\
-2x_1 + 3x_2 \leq 12 \\
2x_1 - x_2 \leq 12 \\
x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0.
\end{cases}$$

Déterminer l'intervalle de stabilité lorsque la fonction économique Z se transforme en $\bar{Z}_\theta(x_1, x_2) = x_1 + 3(1-\theta)x_2$.

Pour répondre à cette question, nous allons proposer deux méthodes différentes. La première utilise le Théorème 5.1.1. Quant à la deuxième, elle se base sur la méthode graphique. Essayons en premier lieu de déterminer l'intervalle de stabilité via le Théorème 5.1.1. Pour ce faire, il va falloir résoudre le (PL) non paramétré par l'algorithme du simplexe afin de déterminer une éventuelle solution optimale. La mise sous forme standard aboutit aux données suivantes :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad c^* = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } b = \begin{pmatrix} 14 \\ 12 \\ 12 \end{pmatrix}$$

Il est clair que $\{y_3, y_4, y_5\}$ forme un système de variables de base réalisable. Partant de cette base réalisable, l'exécution de l'algorithme du simplexe donne ce qui suit :

Itération 1

y_1	y_2		
1	1	14	y_3
-2	**3**	12	y_4
2	-1	12	y_5
1	**3**	0	

$\lambda = 4$

Itération 2

y_1	y_4		
$\mathbf{\frac{5}{3}}$	$-\frac{1}{3}$	10	y_3
$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	4	y_2
$\frac{4}{3}$	$\frac{1}{3}$	16	y_5
3	-1	12	

$\lambda = 6$

Itération 3

y_3	y_4		
$\frac{3}{5}$	$-\frac{1}{5}$	6	y_1
$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	8	y_2
$-\frac{4}{5}$	$\frac{3}{5}$	8	y_5
$-\frac{9}{5}$	$-\frac{2}{5}$	30	

Comme $w_N^* = (-\frac{9}{5} \;\; -\frac{2}{5}) \leq 0_N^*$, alors $(6, 8)$ est une solution optimale du (PL) non paramétré. A présent, nous allons calculer le vecteur ligne $\delta_N^* = \xi_N^* - \xi_B^* B^{-1} N$, qui lui même exige la détermination de ξ. Puisque la fonction économique est basculée de Z à $\bar{Z}_\theta = Z - 3\theta x_2$, alors $\xi = (0, -3, 0, 0, 0)$. Par conséquent, on obtient :

$$\begin{aligned} \delta_N^* &= \xi_N^* - \xi_B^* B^{-1} N \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{6}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Il est clair $\delta_N^* > 0_N^*$ (*i.e.* $\delta_j > 0$ pour tout indice j), donc la borne inférieure θ_{min} de l'intervalle de stabilité n'est pas définie. En se référant

à la démonstration du Théorème 5.1.1, cela se traduit par le fait que la condition "$\theta_{min} \leq \theta$" doit être tout simplement ignorée. En ce qui concerne la borne supérieure, elle vaut :

$$\theta_{max} = \min\{\frac{\frac{9}{5}}{\frac{6}{5}}, \frac{\frac{2}{5}}{\frac{3}{5}}\} = \frac{2}{3}.$$

On conclut que le point $(6, 8)$ reste optimal pour le problème paramétré pour toute valeur $\theta \leq \frac{2}{3}$. Autrement dit, l'intervalle de stabilité est $]-\infty, \frac{2}{3}]$.

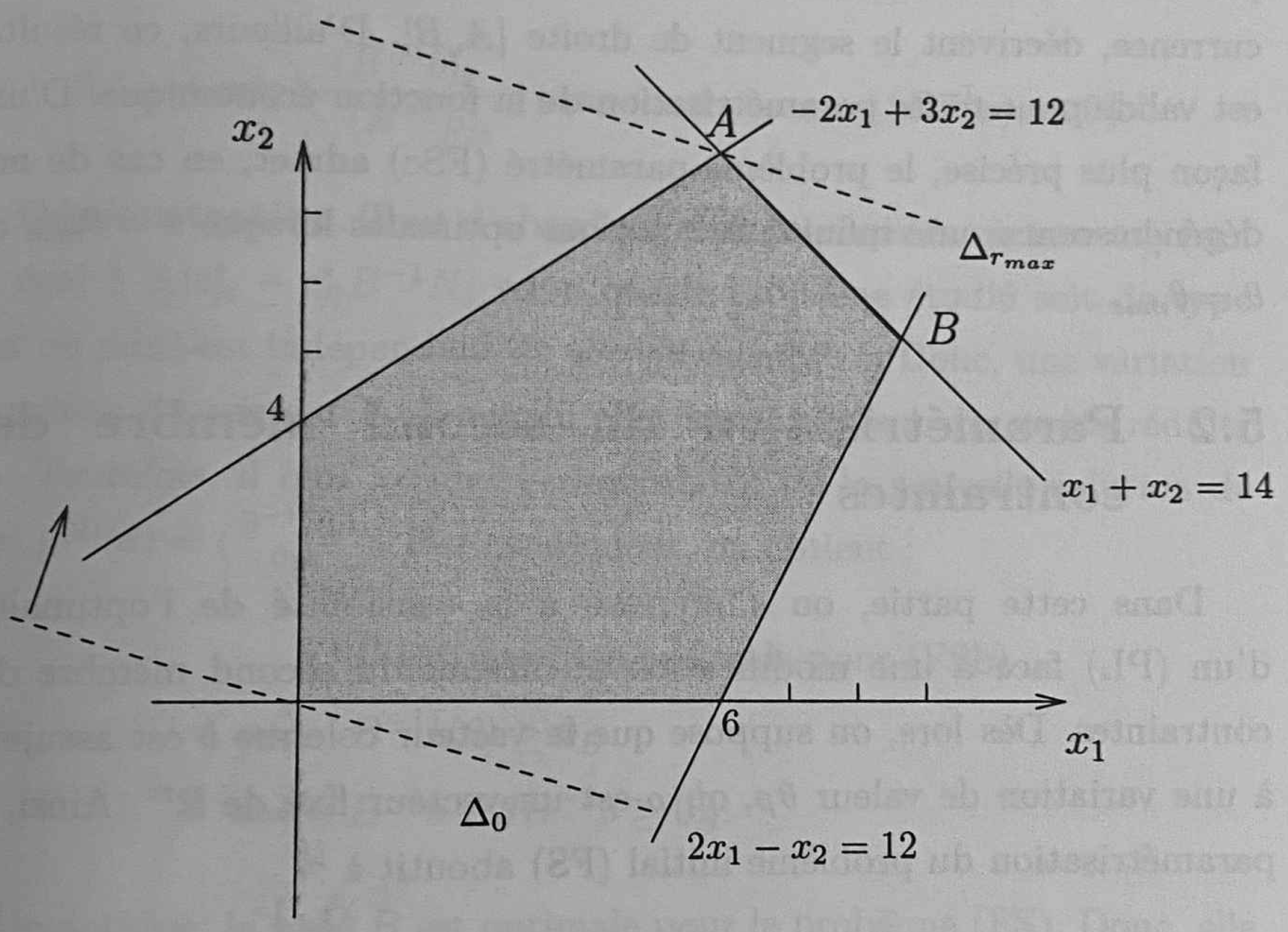


FIG. 5.1 – Représentation graphique pour l'exemple 11.

Essayons maintenant de retrouver ce résultat via la méthode graphique. Le domaine réalisable associé au problème (PL) est schématisé en gris dans la Figure 5.1. Tout d'abord, on remarque qu'une paramétrisation de la fonction économique a pour effet de changer la pente de la droite $\Delta_{r_{max}}$ d'équation $Z(x_1, x_2) = 30$. Pour le problème paramétré, la pente vaut $p = \frac{-1}{3(1-\theta)}$. Sur le graphique, on peut observer que le point optimal bascule du point A vers le point B lorsque la pente p devient strictement inférieure à la pente de la droite : $x_1 + x_2 = 14$, qui elle vaut -1. Aussi, si la pente p est positive, la solution optimale n'est plus égale au point A. Par contre, le point optimal reste inchangé dans le cas où $p \in [-1, 0[$.

Suite à cette analyse graphique, on peut affirmer que le point A est optimal pour le problème paramétré si et seulement si $p \in [-1, 0[$. Enfin, compte tenu de l'expression de la pente p, il est facile de vérifier que la condition $p \in [-1, 0[$ est équivalente à $\theta \in]-\infty, \frac{2}{3}]$.

Il est intéressant de noter que pour la valeur particulière $\theta = \frac{2}{3}$, la droite d'équation $\bar{Z}_\theta(x_1, x_2) = \bar{Z}_\theta(A)$ se trouve confondue à l'hyperplan frontière $x_1 + x_2 = 14$. Donc, pour la valeur limite $\theta = \frac{2}{3}$, le problème va admettre une infinité de solutions optimales qui, en l'occurrence, décrivent le segment de droite $[A, B]$. D'ailleurs, ce résultat est valide pour toute paramétrisation de la fonction économique. D'une façon plus précise, le problème paramétré (FSc) admet, en cas de non dégénérescence, une infinité de solutions optimales lorsque $\theta = \theta_{min}$ ou $\theta = \theta_{max}$.

5.2 Paramétrisation du second membre des contraintes

Dans cette partie, on s'intéresse à la sensibilité de l'optimalité d'un (PL) face à une modification au niveau du second membre des contraintes. Dès lors, on suppose que le vecteur colonne b est assujetti à une variation de valeur $\theta\rho$, où ρ est un vecteur fixé de $\mathbb{R}^m$. Ainsi, la paramétrisation du problème initial (FS) aboutit à :

$$\text{(FSb)} \begin{cases} \max (\text{ou } \min)[Z(y) = c^* y] \\ My = \bar{b}(\theta) \\ y \geq 0_{\mathbb{R}^n}, \end{cases} \qquad \text{avec } \bar{b}(\theta) = b + \theta\rho.$$

La modification du vecteur b entraîne un changement au niveau du domaine réalisable. Dans la pratique, les données du vecteur b correspondent en général à la disponibilité en matière première ou en heures de travail, *etc.* L'intérêt de la paramétrisation de b est de savoir de combien on peut diminuer ou augmenter les quantités disponibles sans avoir à modifier la stratégie optimale de fabrication.

On suppose que le problème de départ (FS) possède une base optimale B et on cherche à connaître les valeurs de θ qui permettent de garder B comme base optimale du problème paramétré (FSb).

Théorème 5.2.1 *Soit B une base optimale que l'on suppose non dégénérée pour le problème (FS). Alors, on a le résultat suivant :*

$$B \text{ est une base optimale pour (FSb)} \Longleftrightarrow \theta_{min} \leq \theta \leq \theta_{max},$$

où

$$\theta_{min} = \max\{\frac{-(B^{-1}b)_i}{(B^{-1}\rho)_i} \text{ ; pour } i = 1, \ldots, m \;/\; (B^{-1}\rho)_i > 0\}$$

et

$$\theta_{max} = \min\{\frac{(B^{-1}b)_i}{-(B^{-1}\rho)_i} \text{ ; pour } i = 1, \ldots, m \;/\; (B^{-1}\rho)_i < 0\}.$$

Démonstration. Tout d'abord, on remarque que le vecteur w_N^* (qui est égal à $\pm[c_N^* - c_B^* B^{-1} N]$ selon que le problème étudié soit de type max ou min) est indépendant du second membre b. Donc, une variation au niveau du vecteur b n'a aucun effet sur le vecteur des coûts réduits w_N^*. Toutefois, il faut vérifier l'admissibilité de la nouvelle solution de base $\bar{y}^{(0)}(\theta) = \binom{B^{-1}\bar{b}(\theta)}{0_N}$. Par conséquent, on obtient :

$$\begin{aligned} & B \text{ est une base optimale pour (FSb)} \\ \Longleftrightarrow \quad & B^{-1}\bar{b}(\theta) \geq 0_B \\ \Longleftrightarrow \quad & B^{-1}b + \theta B^{-1}\rho \geq 0_B. \end{aligned}$$

Par hypothèse, la base B est optimale pour le problème (FS). Donc, elle satisfait les inégalités $(B^{-1}b)_i \geq 0$ pour tout i, en particulier pour les indices i tels que $(B^{-1}\rho)_i = 0$. Alors, on conclut ce qui suit :

$$\begin{aligned} & B \text{ est une base optimale pour (FSb)} \\ \Longleftrightarrow \quad & (B^{-1}b)_i + \theta(B^{-1}\rho)_i \geq 0, \; \forall i \;/\; (B^{-1}\rho)_i \neq 0 \\ \Longleftrightarrow \quad & \begin{cases} \theta \geq \frac{-(B^{-1}b)_i}{(B^{-1}\rho)_i}, & \forall i \;/\; (B^{-1}\rho)_i > 0 \\ \\ \theta \leq \frac{(B^{-1}b)_i}{-(B^{-1}\rho)_i}, & \forall i \;/\; (B^{-1}\rho)_i < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Puisque le nombre des indices de base i est fini, ces deux dernières inégalités sont équivalentes à la condition proposée dans le théorème. La démonstration est ainsi achevée.

□

On vérifie aisément que l'intervalle de stabilité $[\theta_{min}, \theta_{max}]$ contient l'élément nul. Il est de ce fait non vide. Par ailleurs, lorsque la base B demeure optimale pour (FSb), la solution optimale $\bar{y}^{(0)}(\theta) = \binom{B^{-1}\bar{b}(\theta)}{0_N}$ et la valeur optimale $Z(\bar{y}^{(0)}(\theta))$ du problème (FSb) vont différer de celles du problème d'origine (FS) :

$$\bar{y}^{(0)}(\theta) = y^{(0)} + \theta\binom{B^{-1}\rho}{0_N}, \text{ avec } y^{(0)} = \binom{B^{-1}b}{0_N}$$

et

$$Z(\bar{y}^{(0)}(\theta)) = Z(y^{(0)}) + \theta c_B^* B^{-1}\rho.$$

On note également que le résultat du Théorème 5.2.1 est valable aussi bien pour les (PL) de type maximisation que minimisation. Cependant, si on enlève la condition de non dégénérescence, le résultat du Théorème 5.2.1 ne peut être valide que lorsque la base optimale B satisfait l'inégalité $w_N^* \leq 0_N^*$.

Exemple 22 On considère le (PL) suivant :

$$\begin{cases} \max[Z(x_1, x_2) = 3x_1 + 5x_2] \\ \quad 2x_2 \leq 12 \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 18 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Déterminer l'intervalle de stabilité lorsque le second membre $b = \binom{12}{18}$ bascule vers le vecteur $\bar{b}(\theta) = \binom{12+2\theta}{18+\theta}$.

Ce (PL) est écrit sous forme canonique avec un second membre positif. Après la mise sous forme standard, la résolution par le simplexe donne ce qui suit :

Itération 1

y_1	y_2		
0	**2**	12	y_3
3	2	18	y_4
3	**5**	0	

$\lambda = 6$

Itération 2

y_1	y_3		
0	$\frac{1}{2}$	6	y_2
3	-1	6	y_4
3	$-\frac{5}{2}$	30	

$\lambda = 2$

Itération 3

y_4	y_3		
0	$\frac{1}{2}$	6	y_2
$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	2	y_1
-1	$-\frac{3}{2}$	36	

D'après le dernier tableau, la base optimale est

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Puisque $\bar{b}(\theta) = \binom{12+2\theta}{18+\theta}$, alors $\rho = \binom{2}{1}$. En vue de la détermination de $B^{-1}\rho$, le calcul de la matrice inverse B^{-1} peut être outrepassé. Il suffit pour cela de résoudre le système linéaire $Bx = \rho$. Notons aussi que la méthode révisée du simplexe rend disponible la matrice B^{-1}, ce qui permet de calculer directement $x = B^{-1}\rho$. Pour cet exemple, nous allons voir qu'il est possible de procéder autrement. La matrice B^{-1} sera déduite, directement et sans calcul, à partir du dernier tableau simplexe. En effet, d'après l'itération 3, on a :

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } B^{-1}N = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Etant données que la matrice N correspond, à une permutation de colonnes près, à la matrice identité, alors la matrice inverse B^{-1} se déduit automatiquement de $B^{-1}N$ en inversant l'ordre des colonnes de $B^{-1}N$:

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

D'où

$$B^{-1}\rho = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Par conséquent, la base B reste optimale pour le problème paramétré si et seulement si θ vérifie la condition suivante :

$$\begin{aligned} B^{-1}\bar{b}(\theta) \geq 0_B &\iff B^{-1}b + \theta B^{-1}\rho \geq 0_B \\ &\iff \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix} + \theta \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\iff \theta \in [-6, 6]. \end{aligned}$$

En conclusion, l'intervalle de stabilité est $[-6, 6]$.

Concernant le problème paramétré (FSb), la solution optimale

$$\bar{y}^{(0)}(\theta) = \begin{pmatrix} B^{-1}\bar{b}(\theta) \\ 0_N \end{pmatrix}$$

devient dégénérée pour les valeurs extrêmes $\theta = \theta_{min}$ et $\theta = \theta_{max}$. Donc, pour ces valeurs particulières, il existe plusieurs bases réalisables dont la solution de base est $\bar{y}^{(0)}(\theta)$.

5.3 Paramétrisation du premier membre des contraintes

On considère que la colonne d'indice j_0 de la matrice M est modifiée de M_{j_0} en $\bar{M}_{j_0}(\theta) = M_{j_0} + \theta\varphi$, où φ est un vecteur fixé de $\mathbb{R}^m$. Dans la pratique le $i^{\text{ième}}$ élément m_{ij_0} de M_{j_0} correspond souvent au besoin d'un produit j_0 à une matière première i. Dans cette situation, un changement de qualité du produit j_0 ou encore une amélioration technologique de fabrication peuvent avoir des effets sur les données du vecteur M_{j_0}. Suite à cette modification, les matrices M, B et N deviennent respectivement $\bar{M}(\theta)$, $\bar{B}(\theta)$ et $\bar{N}(\theta)$. Le problème paramétrique relatif au problème (FS) s'écrit donc de la manière suivante :

$$\text{(FSM)} \begin{cases} \max\,(\text{ou } \min)[Z(y) = c^*y] \\ \bar{M}(\theta)y = b \\ y \geq 0_{\mathbb{R}^n}, \end{cases}$$

avec $\bar{M}(\theta) = (M_1, \ldots, M_{j_0} + \theta\varphi, \ldots, M_n)$. Comme auparavant, le problème (FS) est supposé avoir une base optimale B et on cherche à connaître les limites de variation de θ afin que $\bar{B}(\theta)$ reste optimale pour (FSM). Nous allons distinguer deux cas selon que l'indice j_0 soit un indice de base ($j_0 \in J_B$) ou que $j_0 \in J_N$.

5.3.1 Paramétrisation d'un vecteur hors base

Traitons en premier lieu le cas où le vecteur M_{j_0} correspond à une colonne de N ($j_0 \in J_N$). Dans cette situation, la matrice $\bar{B}(\theta)$ se trouve identifiée à la base B et par conséquent, la solution optimale pour (FS) demeure réalisable pour (FSM). Notons par i_0 l'indice de la colonne de N qui correspond à M_{j_0}. D'après cette indexation, on obtient $\bar{N}(\theta) = (N_1, \ldots, N_{i_0} + \theta\varphi, \ldots, N_{n-m})$.

Théorème 5.3.1 *Soit B une base optimale que l'on suppose non dégénérée pour le problème (FS) et $y^{(0)} = \binom{B^{-1}b}{0_N}$ la solution de base associée. Si N_{i_0} se transforme en $N_{i_0} + \theta\varphi$, on a le résultat suivant :*

$$y^{(0)} \textit{ est une solution optimale pour (FSM)}$$
$$\Longleftrightarrow \begin{cases} w_{i_0} \leq \theta\pi^*\varphi & \textit{si "max"} \\ w_{i_0} \leq -\theta\pi^*\varphi & \textit{si "min"} \end{cases}$$

où $\pi^* = c_B^* B^{-1}$ et w_{i_0} désigne la $i_0^{\text{ième}}$ composante du vecteur w_N^*.

Démonstration. Puisque B est non dégénérée, alors "$\bar{w}_N^*(\theta) \leq 0_N^*$" est une condition nécessaire et suffisante d'optimalité de la base B pour le problème (FSM). Sous l'hypothèse que (FS) soit de type maximisation, on a :

$$\bar{w}_N^*(\theta) = c_N^* - c_B^* B^{-1}\bar{N}(\theta) = c_N^* - \pi^*\bar{N}(\theta), \text{ avec } \pi^* = c_B^* B^{-1}.$$

En raison de l'expression de $\bar{N}_j(\theta)$ qui satisfait à l'égalité

$$\bar{N}_j(\theta) = \begin{cases} N_j & \text{pour } j \neq i_0 \\ N_j + \theta\varphi & \text{pour } j = i_0, \end{cases}$$

on obtient :

$$\begin{aligned} \bar{w}_N^*(\theta) &= c_N^* - \pi^* N - \theta\,(\,0 \;\ldots\; \pi^*\varphi \;\ldots\; 0\,) \\ &= w_N^* - \theta\,(\,0 \;\ldots\; \pi^*\varphi \;\ldots\; 0\,), \text{ car } c_N^* - \pi^* N = w_N^*. \end{aligned}$$

Par hypothèse, la base B est non dégénérée et optimale pour (FS). Incontestablement, l'inégalité "$w_N^* \leq 0_N^*$" est satisfaite. La condition $\bar{w}_N^*(\theta) \leq 0_N^*$ se traduit alors par $w_{i_0} \leq \theta\pi^*\varphi$. Par ailleurs, le résultat relatif au cas où (FS) est de type minimisation s'en suit d'une façon tout à fait similaire.

□

Le paramètre θ étant dans l'intervalle de stabilité, la modification de N_{i_0} en $N_{i_0} + \theta\varphi$ ne change ni la solution optimale ni la valeur optimale de la fonction d'objectif. Dans le cas contraire, des itérations supplémentaires sont exigées afin d'atteindre l'optimalité. Bien sûr, il est plus avantageux d'initialiser l'algorithme du simplexe par la base réalisable B que par la première base utilisée lors de la résolution du problème (FS).

Exemple 23 On considère le (PL) traité dans l'Exemple 20. D'après la solution optimale, la variable y_2, qui désigne le nombre de bureaux vendus, est une variable hors base. Suite à un changement de qualité, on suppose que les exigences de fabrication d'un bureau en heures de travail, en bois et en métal sont respectivement égales à 2, 2 et 2 au lieu de 2, 3 et 1. Ce changement, a t-il un effet sur la stratégie optimale de fabrication ? Si c'est le cas, donner le nouveau gain maximal.

La colonne N_2 qui correspond à la variable hors base y_2 est modifiée de

$$N_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ en } \bar{N}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Donc,

$$\text{on prend } \theta = 1 \text{ et par suite } \varphi = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

D'après les calculs développés lors de la résolution de l'Exemple 20, la base optimale est

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{5}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}.$$

D'où

$$\begin{aligned} \pi^*\varphi &= c_B^* B^{-1}\varphi \\ &= \begin{pmatrix} 19 & 17 & 12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{5}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 19 & 3 & 12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{7}{2} \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix} \\ &= 2. \end{aligned}$$

Par conséquent, la deuxième composante de w_N^*, relative à y_2, devient :

$$\bar{w}_2 = w_2 - \pi^*\varphi = -1 + 2 = 1.$$

Etant donnée que $\bar{w}_2 \not\leq 0$, la stratégie optimale de fabrication sera modifiée. Suite au changement du vecteur N_2, le tableau simplexe révisé, ayant y_1, y_4 et y_3 comme coordonnées de base réalisable, prend la forme suivante :

<u>Itération 1</u>

y_5	y_2	y_7	y_6		
	4			39	y_1
	−8			30	y_4
0	6	4	−1	48	y_3
−2	1	−1	−3	1827	

On a

$$\gamma = B^{-1}\bar{N}_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -5 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Par conséquent, on obtient :

$$\lambda = \min\{\frac{39}{4}, \frac{48}{6}\} = 8.$$

La ligne du pivot vaut :

$$\beta_{3\bullet} = B_{3\bullet}^{-1}N = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 6 & 4 & -1 \end{pmatrix}.$$

Itération 2

y_5	y_3	y_7	y_6		
				7	y_1
				94	y_4
				8	y_2
-2	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{5}{3}$	$-\frac{17}{6}$	1835	

Grâce au signe négatif de $\bar{w}_N^*$, on peut conclure que la valeur optimale est basculée de 1827 à 1835. Celle-ci est obtenue par la vente de 7 bibliothèques, 8 bureaux et 94 lits.

5.3.2 Paramétrisation d'un vecteur de base

Revenons maintenant à l'étude théorique sur la paramétrisation de la matrice M, et intéressons nous au cas où M_{j_0} appartient à l'ensemble des colonnes formant la base optimale B du problème (FS). Dans ce cas de figure, la matrice N reste inchangée (*i.e.* $\bar{N}(\theta) = N$) et la base B se transforme en $\bar{B}(\theta) = (B_1, \ldots, B_{i_0} + \theta\varphi, \ldots, B_m)$. Puisque la matrice B est une base, ses vecteurs colonnes forment un système générateur libre de $\mathbb{R}^m$. Alors, il existe des coefficients réels $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ uniques tels que $\varphi = \sum \alpha_i B_i$. En tenant compte de cette dernière égalité dans l'expression de $\bar{B}(\theta)$, on obtient :

$$\bar{B}(\theta) = BF(\theta), \text{ où } F(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & & \theta\alpha_1 & & \\ & \ddots & \vdots & & \\ & & 1+\theta\alpha_{i_0} & & \\ & & \vdots & \ddots & \\ & & \theta\alpha_m & & 1 \end{pmatrix}.$$

Il est clair que le déterminant de la matrice $F(\theta)$ est égal à $1 + \theta\alpha_{i_0}$. D'où

$$\bar{B}(\theta) \text{ est une base pour (FSM)} \Longleftrightarrow 1 + \theta\alpha_{i_0} \neq 0.$$

Dans le cas où $F(\theta)$ est régulière, sa matrice inverse vaut

$$F^{-1}(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & & \frac{-\theta\alpha_1}{1+\theta\alpha_{i_0}} & & \\ & \ddots & \vdots & & \\ & & \frac{1}{1+\theta\alpha_{i_0}} & & \\ & & \vdots & \ddots & \\ & & \frac{-\theta\alpha_m}{1+\theta\alpha_{i_0}} & & 1 \end{pmatrix}$$

En posant $x = B^{-1}b$ et $\bar{x}(\theta) = \bar{B}^{-1}(\theta)b$, on obtient

$$\bar{x}(\theta) = \bar{B}^{-1}(\theta)b = F^{-1}(\theta)B^{-1}b = F^{-1}(\theta)x.$$

Cette dernière égalité se traduit par :

$$\bar{x}_i(\theta) = \begin{cases} \frac{x_{i_0}}{1+\theta\alpha_{i_0}} & \text{pour } i = i_0 \\ x_i - \theta\alpha_i \frac{x_{i_0}}{1+\theta\alpha_{i_0}} & \text{pour } i \neq i_0 \end{cases} \tag{5.1}$$

Par hypothèse, la base B est optimale, donc réalisable. Ainsi, toutes les composantes x_i de $B^{-1}b$ sont positives, et en particulier le terme x_{i_0}. Alors, on obtient :

$$\begin{aligned} & \bar{B}(\theta) \text{ est une base réalisable pour (FSM)} \\ \Longleftrightarrow\; & \bar{x}_i(\theta) \geq 0 \;\forall i, \text{ et } 1 + \theta\alpha_{i_0} \neq 0 \\ \Longleftrightarrow\; & \begin{cases} 1 + \theta\alpha_{i_0} > 0 \\ (1 + \theta\alpha_{i_0})x_i - \theta\alpha_i x_{i_0} \geq 0, \;\forall i \neq i_0 \end{cases} \\ \Longleftrightarrow\; & \begin{cases} \theta\alpha_{i_0} > -1 \\ \theta(\alpha_i x_{i_0} - x_i\alpha_{i_0}) \leq x_i, \;\forall i \neq i_0. \end{cases} \end{aligned}$$

Regardons à présent l'effet du changement apporté à B_{i_0} sur le vecteur des coûts réduits. Dans le cas où le problème étudié est de type maximisation, le vecteur $\bar{w}^*_N(\theta)$, relatif à $\bar{B}(\theta) = BF(\theta)$ et $\bar{N}(\theta) = N$, vérifie :

$$\begin{aligned} \bar{w}^*_N(\theta) &= c^*_N - c^*_B\bar{B}^{-1}(\theta)N \\ &= c^*_N - c^*_B F^{-1}(\theta)B^{-1}N \\ &= c^*_N - c^*_B F^{-1}(\theta)\beta, \text{ avec } \beta = B^{-1}N. \end{aligned} \tag{5.2}$$

Pour calculer $\bar{w}_N^*(\theta)$, il va falloir déterminer l'expression de $c_B^* F^{-1}(\theta)$. Posons α le vecteur de $\mathbb{R}^m$ de composantes $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$. Par construction, on a $\varphi = \sum \alpha_i B_i$. Donc on obtient $\varphi = B\alpha$, ce qui entraîne l'égalité $\alpha = B^{-1}\varphi$. D'autre part, on a :

$$\begin{aligned} F^{-1}(\theta) &= \begin{pmatrix} 1 & & \frac{-\theta\alpha_1}{1+\theta\alpha_{i_0}} & & \\ & \ddots & \vdots & & \\ & & \frac{1}{1+\theta\alpha_{i_0}} & & \\ & & \vdots & \ddots & \\ & & \frac{-\theta\alpha_m}{1+\theta\alpha_{i_0}} & & 1 \end{pmatrix} \\ &= I_m - \frac{\theta}{1+\theta\alpha_{i_0}} \begin{pmatrix} 0 & & \alpha_1 & & \\ & \ddots & \vdots & & \\ & & \alpha_{i_0} & & \\ & & \vdots & \ddots & \\ & & \alpha_m & & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Compte tenu de cette nouvelle expression de $F^{-1}(\theta)$, on montre facilement que

$$c_B^* F^{-1}(\theta) = c_B^* - c_B^* \alpha \frac{\theta}{1+\theta\alpha_{i_0}} \begin{pmatrix} 0 & \ldots & 1 & \ldots & 0 \end{pmatrix}.$$

En injectant l'expression de $c_B^* F^{-1}(\theta)$ dans l'égalité (5.2), on obtient :

$$\bar{w}_N^*(\theta) = w_N^* + c_B^* \alpha \frac{\theta}{1+\theta\alpha_{i_0}} \beta_{i_0 \bullet}.$$

Tous les résultats, établis jusqu'ici, sur la paramétrisation de B_{i_0} peuvent être récapitulés dans le théorème suivant.

Théorème 5.3.2 *Soit B une base optimale du problème (FS). Si B_{i_0} se transforme en $B_{i_0} + \theta\varphi$, alors, en posant $\alpha = B^{-1}\varphi$ et $x = B^{-1}b$, on a :*

(i) $\bar{B}(\theta)$ est une base réalisable pour (FSM) si et seulement si

$$\begin{cases} \theta\alpha_{i_0} > -1 \\ \theta(\alpha_i x_{i_0} - x_i \alpha_{i_0}) \leq x_i, \ \forall i \neq i_0. \end{cases}$$

De plus, en désignant par $\bar{w}_N^*(\theta)$ le vecteur des coûts réduits associé à $\bar{B}(\theta)$ (supposée réalisable), on a :

$$(ii)\ \bar{w}_N^*(\theta) \leq 0_N^* \iff \begin{cases} \theta(\alpha_{i_0} w_N^* + c_B^* \alpha \beta_{i_0 \bullet}) \leq -w_N^* & \text{si "max"} \\ \theta(\alpha_{i_0} w_N^* - c_B^* \alpha \beta_{i_0 \bullet}) \leq -w_N^* & \text{si "min"} \end{cases}$$

La propriété *(ii)* s'obtient en multipliant l'expression de $\bar{w}^*_N(\theta)$, établie ci-dessus, par le terme strictement positif $1+\theta\alpha_{i_0}$. Lorsque le paramètre θ vérifie les deux conditions *(i)* et *(ii)*, la nouvelle solution optimale $\bar{y}^{(0)}(\theta) = \binom{\bar{B}^{-1}(\theta)b}{0_N}$ du problème paramétré (FSM) sera calculée via la formule (5.1). Quant à la valeur optimale de la fonction d'objectif Z, elle vaut :

$$
\begin{aligned}
Z(\bar{y}^{(0)}(\theta)) &= c^*_B\bar{B}^{-1}(\theta)b \\
&= [c^*_B F^{-1}(\theta)]B^{-1}b \\
&= [c^*_B - c^*_B\alpha\frac{\theta}{1+\theta\alpha_{i_0}}(0\ \dots\ 1\ \dots\ 0)]B^{-1}b \\
&= c^*_B B^{-1}b - c^*_B\alpha\frac{\theta}{1+\theta\alpha_{i_0}}(B^{-1}b)_{i_0} \\
&= Z(y^{(0)}) - c^*_B\alpha\frac{\theta}{1+\theta\alpha_{i_0}}x_{i_0}, \text{ car } \left\{ \begin{array}{l} c^*_B B^{-1}b = Z(y^{(0)}) \\ B^{-1}b = x. \end{array} \right.
\end{aligned}
$$

Remarquer que pour $\theta = 0$, le problème paramétré (FSM) coïncide avec le problème initial (FS). D'ailleurs, on peut observer que, pour cette valeur particulière du paramètre θ, les éléments $\bar{y}^{(0)}(\theta)$, $\bar{w}^*_N(\theta)$ et $Z(\bar{y}^{(0)}(\theta))$ prennent respectivement les valeurs $y^{(0)}$, w^*_N et $Z(y^{(0)})$.

Exemple 24 Illustrons ce type de paramétrisation par une modification du (PL) traité dans l'Exemple 20. On suppose que la fabrication d'un lit nécessite 2 heures de travail, $4-2\theta$ unités de bois et $1+\theta$ unités de métal. On demande de déterminer l'intervalle de stabilité.

Les données initiales concernant la fabrication d'un lit étaient respectivement 2, 4 et 1. Puisque ces données sont devenues 2, $4-2\theta$ et $1+\theta$, alors, on obtient :

$$
\varphi = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix},
$$

et par suite

$$
\alpha = B^{-1}\varphi = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -5 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -9 \\ 6 \end{pmatrix}.
$$

Au cours de la résolution de l'Exemple 20, le nombre de lits vendus est désigné par la variable y_4, donc l'indice j_0 vaut 4. Cette variable est

située à la deuxième position parmi les coordonnées de base du dernier tableau simplexe. Cela implique que l'indice i_0 vaut 2. En tenant compte des composantes de $B^{-1}b$ qui figurent dans le dernier tableau simplexe, on obtient grâce à la propriété *(i)* du Théorème 5.3.2 :

$$
\begin{aligned}
&\bar{B}(\theta) \text{ est une base réalisable pour (FSM)} \\
\iff &\begin{cases} -9\theta > -1 \\ \theta(30 \times 4 - 39 \times (-9)) \leq 39 \\ \theta(30 \times 6 - 48 \times (9)) \leq 48 \end{cases} \\
\iff &\ \theta \leq \frac{4}{51}.
\end{aligned}
$$

D'après la résolution de l'Exemple 20, on a $c_B^* = (19\ \ 17\ \ 12)$. D'où

$$
c_B^* \alpha = \begin{pmatrix} 19 & 17 & 12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ -9 \\ 6 \end{pmatrix} = -5.
$$

Par ailleurs, la $i_0^{\text{ième}}$ ligne de la matrice $\beta = B^{-1}N$ est égale à :

$$
\begin{aligned}
\beta_{i_0\bullet} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} B^{-1}N \\
&= \begin{pmatrix} -1 & 2 & -5 \end{pmatrix} N, \text{ car } \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} B^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -5 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -1 & 2 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -1 & -1 & -5 & 2 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Etant donné que $w_N^* = (-2\ \ -1\ \ -1\ \ -3)$, d'après le Théorème 5.3.2, il en découle ce qui suit :

$$
\begin{aligned}
\bar{w}_N^*(\theta) \leq 0_N^* \iff &\begin{cases} \theta(-9 \times (-2) - 5 \times (-1)) \leq 2 \\ \theta(-9 \times (-1) - 5 \times (-1)) \leq 1 \\ \theta(-9 \times (-1) - 5 \times (-5)) \leq 1 \\ \theta(-9 \times (-3) - 5 \times (2)) \leq 3 \end{cases} \\
\iff &\begin{cases} \theta \leq \frac{2}{23} \\ \theta \leq \frac{1}{14} \\ \theta \leq \frac{1}{34} \\ \theta \leq \frac{3}{17} \end{cases} \\
\iff &\ \theta \leq \frac{1}{34}.
\end{aligned}
$$

On note que $\frac{1}{34} < \frac{4}{51}$. Donc, pour toute valeur $\theta \leq \frac{1}{34}$, la base réalisable $\bar{B}(\theta)$ est non dégénérée. De plus, cette base vérifie $\bar{w}_N^*(\theta) \leq 0_N^*$. En

conclusion, la base $\bar{B}(\theta)$ est optimale pour (FSM) si et seulement si $\theta \leq \frac{1}{34}$. Autrement dit, l'intervalle de stabilité est égal à $]-\infty, \frac{1}{34}]$. Ainsi, on achève la résolution de cet exemple. Dans ce contexte, il va de soi que les exigences de fabrication en matières premières ($(4-2\theta)$ unités de bois et $(1+\theta)$ unités de métal) soient positives. Outre la condition de stabilité, le paramètre θ doit vérifier naturellement la condition $-1 \leq \theta \leq 2$.

Une application particulière et courante de programmation paramétrique consiste à choisir le vecteur φ (ou ρ, ou encore ξ, selon le type de la paramétrisation) de sorte que toutes ses composantes soient nulles excepté pour une seule composante. Il est tout à fait naturel d'attribuer à cette coordonnée non nulle la valeur $\varphi_i = 1$. La procédure de recherche de l'intervalle de stabilité pour ce choix particulier s'appelle **analyse de sensibilité** ou encore **analyse post-optimale**. A cet égard, on propose de consulter par exemple les ouvrages [3, 4, 12, 15, 18]. Des exercices seront proposés en ce sens à la fin de ce chapitre.

5.4 Exercices

Exercice 5.4.1

1) *Résoudre le (PL) ci-dessous par la méthode de la base non réalisable.*

$$\begin{cases} \min[Z(x) = 31x_1 + 11x_2 + 12x_3] \\ x_1 + x_2 + 2x_3 \quad \geq 9 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 \quad \geq 7 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0. \end{cases}$$

2) *On remplace le second membre* $b = \binom{9}{7}$ *par* $\binom{21}{12}$. *Que devient la solution du nouveau problème ?*

3) *A présent, le second membre change de* b *en* $\bar{b}(\theta) = b + \theta\binom{12}{5}$. *Déterminer l'intervalle de stabilité.*

Exercice 5.4.2

Une usine fabrique 4 produits P_1, P_2, P_3 *et* P_4 *au moyen de 2 machines* M_1 *et* M_2. *Le tableau ci-dessous donne :*

- *le temps-machine (en mn) nécessaire par* M_1 *et* M_2 *pour fabriquer une unité du produit* P_i,
- *le bénéfice dû à la vente d'une unité du produit* P_i.

	P_1	P_2	P_3	P_4
M_1	7	10	4	9
M_2	3	40	1	1
Bénéfice	45	100	30	50

La disponibilité journalière de M_1 est $b_1 = 1200$ mn, celle de M_2 est $b_2 = 800$ mn.

1) *Quelle quantité de chaque produit faut-il fabriquer chaque jour de façon à maximiser le bénéfice ?*

2) *Que devient la solution du problème si c_1 et c_4 passent de 45 à 40 et de 50 à 60 respectivement ?*

3) a - *De combien peut-on diminuer b_1 de sorte que la base optimale trouvée dans la question précédente reste inchangée ?*

b - *Cette diminution affecte-t-elle le gain optimal ? Si c'est le cas, donner le nouveau gain.*

Exercice 5.4.3

1) *Résoudre le (PL) ci-dessous.*

$$\begin{cases} \max[Z(x) = 3x_1 + 2x_2 - 4x_3 + 3x_4 - x_5] \\ 2x_1 + 2x_3 + x_5 \quad = 8 \\ 3x_1 + 4x_2 - 6x_5 \quad \leq 8 \\ -2x_3 + x_4 \quad \leq 1 \\ 2x_1 + 4x_3 + x_5 \quad \geq 4 \\ x = (x_1, \ldots, x_5) \geq 0_{\mathbb{R}^5}. \end{cases}$$

2) *On suppose que la fonction économique Z se transforme en*

$$\bar{Z}_\theta = (3+\theta)x_1 + 2x_2 - (4-\theta)x_3 + (3-2\theta)x_4 - x_5, \text{ avec } \theta \geq 0.$$

Déterminer l'intervalle de stabilité.

3) *La condition $\theta \geq 0$ étant maintenue, on se place en dehors de l'intervalle de stabilité.*

a - *Discuter suivant les valeurs de θ la solution du problème paramétré.*

b - *Représenter le graphe de la valeur optimale de la fonction économique $\bar{Z}_\theta$ en fonction de $\theta \geq 0$.*

c - *Déterminer la valeur de $\theta \geq 0$ qui réalise la meilleure valeur économique.*

d - *Déterminer toutes les valeurs $\theta \geq 0$ pour lesquelles l'optimum économique vaut $\bar{Z}_\theta = 19$.*

Exercice 5.4.4

On considère une (FS) qui admet une solution de base $y^{(0)} = \binom{B^{-1}b}{0_N}$ optimale et non dégénérée. La composante c_i, relative à la fonction économique Z, est supposée être remplacée par $c_i + \theta$. Le problème paramétré et la fonction économique, ainsi obtenus, sont respectivement notés par (FSc) et $\bar{Z}_\theta$.

1) a - *En supposant que la valeur c_i est une composante hors base, montrer le résultat suivant :*

$$y^{(0)} \text{ est une solution optimale pour (FSc)} \Leftrightarrow \theta \leq w_{i_0}.$$

Le réel w_{i_0} étant la composante d'indice i_0 du vecteur des coûts réduits w_N^* qui correspond à la variable hors base y_i.

b - *Pour $\theta \leq w_{i_0}$, exprimer la valeur optimale $\bar{Z}_\theta(y^{(0)})$ en fonction de $Z(y^{(0)})$ et θ.*

2) *On suppose maintenant que la valeur c_i est une composante de base. Par analogie avec la première question, on note par $\beta_{i_0\bullet}$ la ligne i_0 de la matrice $\beta = B^{-1}N$ relative à la variable de base y_i.*

a - *Montrer que pour un problème de type maximisation, on a :*

$$y^{(0)} \text{ est une solution optimale pour (FSc)} \Leftrightarrow \theta_{min} \leq \theta \leq \theta_{max},$$

avec

$$\theta_{min} = \max\{\frac{w_j}{\beta_{i_0j}} \;/\; \beta_{i_0j} > 0\} \text{ et } \theta_{max} = \min\{\frac{w_j}{\beta_{i_0j}} \;/\; \beta_{i_0j} < 0\}.$$

b - *En restant dans l'intervalle de stabilité, montrer que la valeur optimale $\bar{Z}_\theta$ vérifie*

$$\bar{Z}_\theta \leftarrow Z + \theta(B^{-1}b)_{i_0}.$$

Exercice 5.4.5

Considèrons une (FS) qui admet base optimale B non dégénérée. On suppose que la composante b_i, relative au second membre b, est modifiée de b_i en $b_i + \theta$. Le problème paramétré est noté par (FSb).

1) a - *En posant $v = B^{-1}e_i$, où e_i désigne le $i^{\text{ième}}$ vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^m$, montrer que :*

$$B \text{ est une base optimale pour (FSb)} \Leftrightarrow \theta_{min} \leq \theta \leq \theta_{max},$$

avec

$$\theta_{min} = \max\{\frac{(B^{-1}b)_j}{-v_j} \ / \ v_j > 0\} \text{ et } \theta_{max} = \min\{\frac{(B^{-1}b)_j}{-v_j} \ / \ v_j < 0\}.$$

1)a - *Si θ appartient à l'intervalle de stabilité, montrer que*

$$\bar{Z}_\theta \leftarrow Z + \theta c_B^* v.$$

2) *On suppose que e_i fait partie des colonnes de M, ce qui est tout à fait envisageable.*

a - *En premier lieu, on suppose que e_i figure parmi les colonnes de B. Montre que*

$$v = e_{i_0}, \text{ où } i_0 \text{ est un indice à définir.}$$

b - *En second lieu, on suppose que e_i figure parmi les colonnes de N. Exprimer $v = B^{-1}e_i$ en fonction d'une colonne de la matrice $\beta = B^{-1}N$.*

Exercice 5.4.6

Soit (FS) une forme standard qui admet base optimale B non dégénérée. Considérons une augmentation de valeur θ au niveau de l'élément (i_0, j_0) de la matrice M. Ainsi, la colonne M_{j_0} devient $M_{j_0} + \theta e_{i_0}$, où e_{i_0} est le $i_0^{\text{ième}}$ vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^m$.

1) *L'indice j_0 est supposé dans J_N.*

a - *En posant $\pi^* = c_B^* B^{-1}$, montrer que $\pi_{i_0} = c_B^* \beta_j$, où j est un indice à déterminer.*

b - *En déduire que :*

$$B \text{ est optimale pour (FSM)} \Leftrightarrow \begin{cases} w_j \leq \theta c_B^* \beta_j & \text{si "max"} \\ w_j \leq -\theta c_B^* \beta_j & \text{si "min".} \end{cases}$$

2) *On suppose maintenant que $j_0 \in J_B$. La base B se transforme donc en $\bar{B}(\theta)$.*

a - *Montrer que :*

$$\bar{B}(\theta) \text{ est une base réalisable pour (FSM)} \Leftrightarrow \theta > -1.$$

b - *En supposant la condition $\theta > -1$ satisfaite, montrer que :*

$$\bar{w}_N^*(\theta) \leq 0_N^* \Leftrightarrow \begin{cases} (1+\theta) w_N^* + \theta c_i \beta_{i\bullet} \leq 0_N^* & \text{si "max"} \\ (1+\theta) w_N^* - \theta c_i \beta_{i\bullet} \leq 0_N^* & \text{si "min",} \end{cases}$$

où i est un indice à déterminer.

c - *Sous réserve que θ reste dans l'intervalle de stabilité, montrer que la nouvelle valeur économique vaut :*

$$\bar{Z}(\theta) = Z(y^{(0)}) - \frac{\theta}{1+\theta} c_i (B^{-1}b)_i.$$

Exercice 5.4.7

1) *Pour une base optimale B d'une (FS) de type maximisation, quel est l'effet d'une diminution au niveau des coûts hors base c_N ?*

2) *Pour une base optimale B d'une (FS) de type minimisation, quel est l'effet d'une augmentation au niveau des coûts hors base c_N ?*

Exercice 5.4.8

1) *Montrer que pour le cas d'une paramétrisation de la fonction économique, le problème (FSc) admet une infinité de solutions optimales dans le cas où $\theta \in \{\theta_{min}, \theta_{max}\}$.*

2) *Montrer que pour le cas d'une paramétrisation du second membre, la matrice B du problème (FSb) devient dégénérée dans le cas où $\theta \in \{\theta_{min}, \theta_{max}\}$.*

Chapitre 6

Dualité en programmation linéaire

Dans le cadre de la programmation linéaire, on peut associer à chaque (PL) un autre (PL), de type opposé, nommé programme dual. Leurs propriétés sont étroitement liées. Par souci d'optimiser les calculs lors de la résolution d'un (PL), il est plus avantageux, dans certaines circonstances, de résoudre le problème dual. Ensuite, la solution du (PL) initial sera déduite facilement par l'intermédiaire de la solution du dual. Une des conséquences les plus fructueuses de la notion de dualité est l'algorithme dual-simplexe, celui-ci été conçu, dans les années 50, par Lemke [21]. Cet algorithme a un intérêt inéluctable en programmation linéaire.

6.1 Primal - Dual

On considère un programme linéaire écrit sous forme canonique que l'on suppose de type maximisation :

$$\begin{cases} \max[Z(x) = c^* x] \\ Ax \leq b \\ x \geq 0_{\mathbb{R}^p}. \end{cases}$$

Von Neumann, un Mathématicien Allemand du début du 20$^{\text{ième}}$ siècle, a défini le **dual** de ce problème par le programme linéaire de type minimisation suivant :

$$\begin{cases} \min[\psi(v) = b^* v] \\ A^* v \geq c \\ v \geq 0_{\mathbb{R}^m}. \end{cases}$$

Le problème initial à partir duquel on a défini le dual s'appelle **primal**. Pour une forme canonique, le second membre du dual est formé par les coefficients de la fonction économique du primal ; de même, les coefficients de la fonction d'objectif du dual ne sont autres que les composantes du second membre du dual ; aussi, la matrice régissant les contraintes du dual est la matrice transposée de la matrice du primal ; et enfin, les inégalités (mise à part les inégalités de positivité) du primal et du dual sont en sens inverse.

On aurait pu choisir comme primal un problème de minimisation, le dual aurait été alors un programme linéaire de type maximisation. La dualité est très utilisée en programmation linéaire, notamment pour faciliter les calculs. Par exemple, un primal avec quatre variables de décision et deux contraintes ne peut être résolu par la méthode graphique, tandis que cela ne pose aucun problème pour son dual qui lui, admet deux variables et quatre contraintes. A titre indicatif, le dual de

$$\begin{cases} \max[Z(x) = 4x_1 + 5x_2 - x_3 - 2x_4] \\ 4x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 \leq 6 \\ -3x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 \leq 8 \\ x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \geq 0_{\mathbb{R}^4} \end{cases} \quad \text{est} \quad \begin{cases} \min[\psi(v) = 6v_1 + 8v_2] \\ 4v_1 - 3v_2 \geq 4 \\ -v_1 + 3v_2 \geq 5 \\ 2v_1 - 2v_2 \geq -1 \\ -v_1 + v_2 \geq -2 \\ v = (v_1, v_2) \geq 0_{\mathbb{R}^2}. \end{cases}$$

Essayons de donner une interprétation économique à la notion de dualité. Considérons par exemple une entreprise qui fabrique p produits faisant intervenir m matières premières. L'entreprise en question dispose pour chaque matière première i ; $i = 1, \ldots, m$; de la quantité b_i. Le profit dû à la vente d'une unité du produit j ; $j = 1, \ldots, p$; vaut c_j. Pour chaque unité du produit j, la proportion consommée du bien i est a_{ij}. Le problème posé à l'entreprise est de connaître le profit maximal tout en respectant les contraintes de disponibilité de stock. Mathématiquement, cela se traduit par le (PL) suivant :

$$\begin{cases} \max[Z(x) = \sum_{j=1}^{p} c_j x_j] \\ \sum_{j=1}^{p} a_{ij} x_j \leq b_i, \text{ pour } i = 1, \ldots, m \\ x = (x_1, \ldots, x_p) \geq 0_{\mathbb{R}^p}. \end{cases}$$

La variable x_j désigne la quantité vendue du produit j. La détermination d'une solution optimale de ce problème permet à l'entreprise de connaître la quantité qu'elle doit fabriquer pour chaque article j afin d'assurer un gain maximal. Par convention, le signe de la quantité b_i est positif lorsqu'il s'agit d'une disponibilité et négatif lorsqu'il s'agit d'une demande. De même pour c_j qui doit être positif ou négatif selon qu'il corresponde à un profit ou un coût. Aussi, le terme a_{ij} est positif (*resp.* négatif) si j consomme (*resp.* produit) i. Par définition, le dual de ce problème est

$$\begin{cases} \min[\psi(v) = \sum_{i=1}^{m} b_i v_i] \\ \sum_{i=1}^{m} a_{ij} v_i \geq c_j, \text{ pour } j = 1, \ldots, p \\ v = (v_1, \ldots, v_m) \geq 0_{\mathbb{R}^m}. \end{cases}$$

Par homogénéité, on est amené à donner à chaque variable v_i la signification du prix unitaire de la matière première i. Il ne s'agit nullement du prix d'achat (ou de revient) du bien i, qui est une constante fixée, mais bien d'un profit unitaire fictif attaché à la matière première i. Chaque variable v_i ; $i = 1, \ldots, m$; peut être interprétée par le prix que doit proposer l'entreprise à un concurrent (ou sous-traitant) qui veut acheter le bien b_i de sorte que l'entreprise acquérisse un profit au moins égal à c_j lorsque le concurrent rachète l'ensemble des biens nécessaires à la fabrication du produit j. Ainsi, le prix d'achat du concurrent de tous les biens b_i au prix unitaire v_i vaut exactement $\sum b_i v_i$, et la condition demandée au concurrent par l'entreprise se traduit par les inégalités $\sum a_{ij} v_i \geq c_j$. Bien sûr, l'objectif du concurrent est de minimiser ses frais d'achat. La minimisation de ces frais tout en satisfaisant à la condition fixée par l'entreprise se traduit mathématiquement par le problème dual.

Tout programme linéaire ne s'écrit pas forcément sous forme canonique. Il peut admettre en effet des contraintes d'égalités et/ou des variables sans restriction de signe. Pour une raison de commodité, on convient d'abréger l'expression "sans restriction de signe" en "s. r. s.". De ce fait, la forme générale d'un primal de type maximisation s'écrit de la façon

suivante :

$$(\mathcal{P})\begin{cases} \max[Z(x)=\sum_{j=1}^{p} c_j x_j] \\ \sum_{j=1}^{p} a_{ij}x_j \leq b_i, \text{ pour } i=1,\ldots,l \\ \sum_{j=1}^{p} a_{ij}x_j = b_i, \text{ pour } i=l+1,\ldots,m \\ x_j \geq 0, \text{ pour } j=1,\ldots,k \\ x_j \text{ s. r. s., pour } j=k+1,\ldots,p. \end{cases}$$

En remplaçant chaque contrainte d'égalité par une double inégalité et chaque variable x_j s. r. s. par la différence de deux variable positives x_j^+ et x_j^-, le primal $(\mathcal{P})$ va devoir acquérir une forme canonique. Une fois la forme canonique du problème $(\mathcal{P})$ établie, nous allons pouvoir déterminer son dual $(\mathcal{D})$. Après un certain nombre d'opérations algébriques, on montre que le dual de $(\mathcal{P})$ est :

$$(\mathcal{D})\begin{cases} \min[\psi(v)=\sum_{i=1}^{m} b_i v_i] \\ \sum_{i=1}^{m} a_{ij}v_i \geq c_j, \text{ pour } j=1,\ldots,k \\ \sum_{i=1}^{m} a_{ij}v_i = c_j, \text{ pour } j=k+1,\ldots,p \\ v_i \geq 0, \text{ pour } i=1,\ldots,l \\ v_i \text{ s. r. s., pour } i=l+1,\ldots,m. \end{cases}$$

Par convention, une propriété, suivie d'une indexation allant de q à r, est retenue uniquement si $q \leq r$. Dans le cas contraire (*i. e.* $q > r$), la propriété est tout simplement ignorée. Par suite, lorsque le primal $(\mathcal{P})$ ne contient aucune contrainte d'égalité, cela se traduit par le fait que $l = m$. Aussi, l'absence de variables s. r. s. se manifeste par l'égalité $k = p$. Donc, pour les valeurs $l = m$ et $k = p$, le primal $(\mathcal{P})$ devient effectivement un (PL) sous forme canonique. Pour ce cas particulier, on observe que les contraintes d'égalité et les variables s. r. s. vont disparaître du problème dual $(\mathcal{D})$. Ainsi, on retrouve le résultat, sur le dual d'une forme canonique, donné au début de ce chapitre. Noter également que lorsque le primal est écrit sous une forme générale, son dual l'est aussi. Le tableau ci-dessous récapitule les règles de correspondance entre un primal de type maximisation et son dual.

Primal	Dual
-maximisation	-minimisation
-coefficients d'objectif	-second membre
-second membre	-coefficients d'objectif
-matrice régissant les contraintes	-matrice transposé
-Relation liant les contraintes	-Nature des variables
$*i^{\text{ième}}$ inégalité : $\leq$	$*v_i \geq 0$
$*i^{\text{ième}}$ équation : $=$	$*v_i$ s. r. s.
-Nature des variables	-Relation liant les contraintes
$*x_j \geq 0$	$*j^{\text{ième}}$ inégalité : $\geq$
$*x_j$ s. r. s.	$*j^{\text{ième}}$ équation : $=$

Lemme 6.1.1 *Le dual du dual est le primal.*

Démonstration. Il est bien connu que le minimum d'une fonction f est l'opposé du maximum de $-f$. Par conséquent, le dual est équivalent à :

$$\begin{cases} -\max[\sum_{i=1}^{m}(-b_i)v_i] \\ \sum_{i=1}^{m} b_{ji}v_i \leq -c_j, \text{ pour } j=1,\ldots,k \\ \sum_{i=1}^{m} b_{ji}v_i = -c_j, \text{ pour } j=k+1,\ldots,p \\ v_i \geq 0, \text{ pour } i=1,\ldots,l \\ v_i \text{ s. r. s., pour } i=l+1,\ldots,m \end{cases} \quad \text{avec } b_{ji} = -a_{ij}.$$

Selon les règles de correspondance sur la dualité, ce problème admet comme dual le (PL) suivant :

$$\begin{cases} -\min[-\sum_{j=1}^{p} c_j x_j] \\ \sum_{j=1}^{p} b_{ji}x_j \geq -b_i, \text{ pour } i=1,\ldots,l \\ \sum_{j=1}^{p} b_{ji}x_j = -b_i, \text{ pour } i=l+1,\ldots,m \\ x_j \geq 0, \text{ pour } j=1,\ldots,k \\ x_j \text{ s. r. s., pour } j=k+1,\ldots,p. \end{cases}$$

En remplaçant b_{ji} par sa valeur $-a_{ij}$ et grâce à la propriété $-\min(-f) = \max(f)$, ce dernier (PL) va devoir s'attribuer la forme du primal. La démonstration de ce lemme est ainsi achevée.

□

Ce lemme permet de restreindre l'étude de la dualité sur les (PL) de type maximisation. Si le primal étudié est de type minimisation, il est naturellement le dual $(\mathcal{D})$ de son propre dual $(\mathcal{P})$. Autrement dit, si on permutait dans le tableau précédent les deux mots "Primal" et "Dual", on obtiendrait les règles de correspondance entre un primal de minimisation et son dual.

6.2 Conditions d'optimalité

Nous allons établir dans ce paragraphe des conditions nécessaires et suffisantes d'optimalité à la fois pour le primal $(\mathcal{P})$ et son dual $(\mathcal{D})$. On verra aussi ce qu'il en est pour le problème dual lorsque le primal admet un optimum infini.

6.2.1 Optimalité pour le primal-dual

Lemme 6.2.1 *Si x et v sont deux solutions réalisables de $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{D})$ respectivement, alors $Z(x) \leq \psi(v)$.*

Démonstration. Considèrons deux éléments $x \in \mathbb{R}^p$ et $v \in \mathbb{R}^m$ vérifiant :

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{p} a_{ij}x_j \leq b_i, \text{ pour } i = 1, \ldots, l \\ \sum_{j=1}^{p} a_{ij}x_j = b_i, \text{ pour } i = l+1, \ldots, m \\ x_j \geq 0, \text{ pour } j = 1, \ldots, k \\ x_j \text{ s. r. s., pour } j = k+1, \ldots, p \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{m} a_{ij}v_i \geq c_j, \text{ pour } j = 1, \ldots, k \\ \sum_{i=1}^{m} a_{ij}v_i = c_j, \text{ pour } j = k+1, \ldots, p \\ v_i \geq 0, \text{ pour } i = 1, \ldots, l \\ v_i \text{ s. r. s., pour } i = l+1, \ldots, m. \end{cases}$$

Alors, on obtient :

$$\begin{aligned}
Z(x) &= \sum_{j=1}^{p} c_j x_j \\
&= \sum_{j=1}^{k} c_j x_j + \sum_{j=k+1}^{p} \sum_{i=1}^{m} a_{ij} v_i x_j, \text{ car } c_j = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} v_i \text{ pour } j > k \\
&\leq \sum_{j=1}^{p} \sum_{i=1}^{m} a_{ij} v_i x_j, \text{ car } c_j \leq \sum_{i=1}^{m} a_{ij} v_i \text{ et } x_j \geq 0 \text{ pour } j \leq k \\
&= \sum_{i=1}^{m} v_i \sum_{j=1}^{p} a_{ij} x_j \\
&= \sum_{i=1}^{l} v_i \sum_{j=1}^{p} a_{ij} x_j + \sum_{i=l+1}^{m} v_i b_i, \text{ car } \sum_{j=1}^{p} a_{ij} x_j = b_i \text{ pour } i > l \\
&\leq \sum_{i=1}^{m} v_i b_i, \text{ car } \sum_{j=1}^{p} a_{ij} x_j \leq b_i \text{ et } v_i \geq 0 \text{ pour } i \leq l \\
&= \psi(v).
\end{aligned}$$

Le lemme est ainsi démontré.

□

D'après l'interprétation économique de la dualité, le lemme 6.2.1 assure que le prix total d'achat du concurrent, qui est $\psi(v)$, est toujours supérieur au gain $Z(x)$ de l'entreprise et ceci quelque soit la stratégie de production x et quelque soit la stratégie d'achat v. Bien sûr, il faut que x et v satisfassent toutes les deux les contraintes du primal-dual. Nous allons voir, dans le corollaire qui suit, que l'optimalité du primal-dual sera atteinte lorsque l'équilibre économique est réalisé : $Z(x) = \psi(v)$.

Corollaire 6.2.2 *Soit x_{op} et v_{op} deux solutions réalisables de $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{D})$ respectivement. Si $Z(x_{op}) = \psi(v_{op})$, alors x_{op} et v_{op} sont deux solutions optimales de $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{D})$ respectivement.*

Démonstration. Considérons un point réalisable x du primal $(\mathcal{P})$. D'après le lemme précédent, on a $Z(x) \leq \psi(v_{op})$. Par hypothèse, on a $Z(x_{op}) = \psi(v_{op})$, donc on obtient $Z(x) \leq Z(x_{op})$. Ceci prouve bien que x_{op} réalise la valeur maximale de la fonction d'objectif Z. Puisque x_{op} est réalisable, il est nécessairement optimal pour le problème $(\mathcal{P})$. Le même

raisonnement permet de prouver que v_{op} est une solution optimale du dual $(\mathcal{D})$. □

Dans la pratique, il est souvent difficile de trouver deux points réalisables x_{op} et v_{op} de $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{D})$ tels que $Z(x_{op}) = \psi(v_{op})$. La situation la plus envisageable consiste à déterminer une solution optimale du primal via par exemple le simplexe, puis essayer d'en dégager une solution optimale du dual. Cependant, l'algorithme du simplexe donne une solution optimale y_{op} non pas de $(\mathcal{P})$ mais de la forme standard associée. Il faut au préalable déduire x_{op} à partir de y_{op} avant d'en dégager v_{op}. Cela se fait naturellement par l'intermédiaire du Théorème 2.1.1. Pour le problème de détermination d'une solution optimale du dual à partir d'une autre solution optimale du primal, deux méthodes différentes seront analysées. La première utilise $y_{op} = \binom{B^{-1}b}{0_N}$ et plus précisément la base optimale B associée. Quant à la deuxième, la détermination de v_{op} se fait directement à partir de x_{op}.

Lemme 6.2 3 *Un primal et sa forme standard ont tous les deux le même dual.*

Démonstration. Considérons un primal écrit sous forme canonique :

$$(\text{FCP}) \begin{cases} \max[Z(x) = c^*x] \\ Ax \le b \\ x \ge 0_{\mathbb{R}^p}. \end{cases}$$

Par définition, le dual de ce (PL) est

$$(\text{FCD}) \begin{cases} \min[\psi(v) = b^*v] \\ A^*v \ge c \\ v \ge 0_{\mathbb{R}^m}. \end{cases}$$

Montrons que le dual de la forme standard associée à (FCP) est (FCD). On sait que la forme standard de (FCP) s'écrit de la manière suivante (voir chapitre 2, paragraphe 1) :

$$(\text{FSFCP}) \begin{cases} \max[\tilde{Z}(y) = \tilde{c}^*y] \\ My = b \\ y \ge 0_{\mathbb{R}^n}, \end{cases}$$

avec $\tilde{c} = \binom{c}{0_{\mathbb{R}^m}}$, $M = [A \;\; I_m]$ et $n = m+p$. La forme standard (FSFCP) est un cas particulier du problème général $(\mathcal{P})$ pour les valeurs $l = 0$ et $k = p = n$. Donc, on peut déterminer le dual de (FSFCP) en insérant les valeurs particulières $l = 0$ et $k = p = n$ dans $(\mathcal{D})$. De cette façon, on trouve que le dual du problème (FSFCP) est :

$$\begin{cases} \min[\psi(v) = b^* v] \\ M^* v \geq \tilde{c} \\ v \in \mathbb{R}^m \text{ s. r. s.} \end{cases}$$

Compte tenu de l'expression de M et de $\tilde{c}$, on obtient :

$$M^* v \geq \tilde{c} \iff \binom{A^*}{I_m} v \geq \binom{c}{0_{\mathbb{R}^m}} \iff \binom{A^* v}{v} \geq \binom{c}{0_{\mathbb{R}^m}} \iff \begin{cases} A^* v \geq c \\ v \geq 0_{\mathbb{R}^m}. \end{cases}$$

Cela prouve bien que le dual de (FSFCP) coïncide parfaitement avec (FCD). Ce lemme a été démontré lorsque le primal est écrit sous forme canonique. Dans le cas où le primal possède la forme générale $(\mathcal{P})$, la démonstration exige un peu plus de calculs, mais elle est similaire.

□

L'intérêt de ce lemme est évident : une fois qu'une solution s'avère optimale pour le dual d'un problème sous forme standard (FS), elle l'est aussi pour le dual du problème d'origine dont est issue (FS). Dès lors, on écrit le primal $(\mathcal{P})$ sous forme standard, puis on essaie de déterminer une éventuelle base optimale. Bien entendu, cette forme standard possède la forme suivante :

$$\begin{cases} \max[\tilde{Z}(y) = \tilde{c}^* y] \\ My = b \\ y \geq 0_{\mathbb{R}^n}. \end{cases}$$

Ici, on ne s'intéresse ni à l'expression explicite du vecteur $\tilde{c}$ ni à celle de la matrice M. Mais ce qui importe est de savoir qu'elles dépendent respectivement des coefficients c_j et a_{ij} du primal $(\mathcal{P})$. De plus, la matrice M contient exactement m lignes.

Théorème 6.2.4 *Soit B une base réalisable de la forme standard relative au primal $(\mathcal{P})$. Si la base B vérifie $w_N^* \leq 0_N^*$, alors $v_{op}^* = \tilde{c}_B^* B^{-1}$ est une solution optimale du dual $(\mathcal{D})$.*

Démonstration. Montrons tout d'abord que le point v_{op} est réalisable pour le dual $(\mathcal{D})$. D'après le lemme précédent, le problème

$(\mathcal{D})$ coïncide avec le dual de la forme standard associée à $(\mathcal{P})$. Au cours de la démonstration du Lemme 6.2.3, on a vu que le dual de cette forme standard est :

$$\begin{cases} \min[\psi(v) = b^*v] \\ M^*v \geq \tilde{c} \\ v \in \mathbb{R}^m \text{ s. r. s.} \end{cases}$$

Donc, pour démontrer que v_{op} est réalisable pour $(\mathcal{D})$, il suffit de prouver que $M^*v_{op} \geq \tilde{c}$. En effet, on a :

$$\begin{aligned} & w_N^* = \tilde{c}_N^* - \tilde{c}_B^* B^{-1} N \leq 0_N^* \\ \Longleftrightarrow\ & \tilde{c}_B^* B^{-1} N \geq \tilde{c}_N^* \\ \Longleftrightarrow\ & (\tilde{c}_B^* \ \ \tilde{c}_B^* B^{-1} N) \geq (\tilde{c}_B^* \ \ \tilde{c}_N^*), \text{ car l'inégalité } \tilde{c}_B^* \geq \tilde{c}_B^* \text{ est vérifiée} \\ \Longleftrightarrow\ & \tilde{c}_B^* B^{-1}[B \ \ N] \geq (\tilde{c}_B^* \ \ \tilde{c}_N^*) \\ \Longleftrightarrow\ & v_{op}^* M \geq \tilde{c}^*, \text{ car } \tilde{c}_B^* B^{-1} = v_{op}^*,\ [B \ \ N] = M \text{ et } (\tilde{c}_B^* \ \ \tilde{c}_N^*) = \tilde{c}^* \\ \Longleftrightarrow\ & M^* v_{op} \geq \tilde{c}. \end{aligned}$$

Maintenant, pour montrer que v_{op} est optimal, nous allons tirer profit du Corollaire 6.2.2. Plus précisément, nous montrerons que $\psi(v_{op}) = Z(x_{op})$. Le point x_{op} désigne la solution optimale du primal $(\mathcal{P})$, obtenue à partir de $y_{op} = \binom{B^{-1}b}{0_N}$ via le Théorème 2.1.1. A partir de l'expression de v_{op} et de y_{op}, on obtient :

$$\begin{aligned} \psi(v_{op}) &= b^* v_{op} \\ &= v_{op}^* b \\ &= \tilde{c}_B^* B^{-1} b \\ &= \begin{pmatrix} \tilde{c}_B^* & \tilde{c}_N^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B^{-1}b \\ 0_N \end{pmatrix} \\ &= \tilde{c}^* y_{op} \\ &= \tilde{Z}(y_{op}) \\ &= Z(x_{op}), \text{ d'après le Théorème 2.1.1.} \end{aligned}$$

Alors, on conclut que v_{op} est une solution optimale du problème dual $(\mathcal{D})$.

□

Afin de déterminer la solution optimale $v_{op}^* = \tilde{c}_B^* B^{-1}$, il est inutile de calculer la matrice inverse B^{-1}. Il suffit, en effet, de résoudre le

système de Cramer $v^*B = c^*_B$. Par ailleurs, le Théorème 6.2.4 n'exige aucune condition sur la nature du primal (max ou min). Au cas où le primal est de type minimisation, le vecteur des coûts réduits devient $w^*_N = \tilde{c}^*_B B^{-1}N - \tilde{c}^*_N$ au lieu de $w^*_N = \tilde{c}^*_N - \tilde{c}^*_B B^{-1}N$. Cela n'affecte pas la démonstration du Théorème 6.2.4, puisque d'un autre côté les contraintes du dual deviennent $M^*v \leq \tilde{c}$ au lieu de $M^*v \geq \tilde{c}$ (voir le tableau de correspondance primal-dual).

Exemple 25 Considérons le programme linéaire suivant :

$$\begin{cases} \max[Z(x) = 3x_1 + 4x_3] \\ x_1 + 2x_2 + x_3 \quad = 4 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 \quad \leq 1 \\ x = (x_1, x_2, x_3) \geq 0_{\mathbb{R}^3}. \end{cases}$$

1 - Montrer directement (sans simplexe) que $x_{op} = (2, 1, 0)$ est une solution optimale.

2 - En déduire une base optimale de la forme standard associée.

3 - Déterminer alors une solution optimale du problème dual.

Toute solution réalisable $x = (x_1, x_2, x_3)$ vérifie

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 4 \\ 2x_1 - 2x_2 + 4x_3 \leq 2 \\ x = (x_1, x_2, x_3) \geq 0_{\mathbb{R}^3}. \end{cases}$$

En sommant membre à membre les deux premières contraintes, on obtient $3x_1 + 5x_3 \leq 6$. Etant donné que la variable x_3 est positive, alors $3x_1 + 4x_3 \leq 3x_1 + 5x_3$, et donc $3x_1 + 4x_3 \leq 6$. Par suite, $Z(x) \leq 6$ pour toute solution réalisable x. D'autre part, il est facile de vérifier que le point $(2, 1, 0)$ est réalisable. De plus, il a pour valeur d'objectif $Z(2, 1, 0) = 6$. En conclusion, on a $Z(x) \leq Z(2, 1, 0)$ pour toute solution réalisable x, ce qui prouve que $(2, 1, 0)$ est une solution optimale.

En ce qui concerne la deuxième question, la forme standard du (PL) considéré s'écrit comme suit :

$$\begin{cases} \max[Z(y) = 3y_1 + 4y_3] \\ y_1 + 2y_2 + y_3 \quad = 4 \\ y_1 - y_2 + 2y_3 + y_4 \quad = 1 \\ y = (y_1, y_2, y_3, y_4) \geq 0_{\mathbb{R}^4}. \end{cases}$$

La solution optimale y_{op} de cette forme standard sera obtenue à partir de x_{op} par l'intermédiaire du Théorème 2.1.1. On observe que $x_{op} =$

$(2,1,0)$ sature la deuxième contrainte (*i.e.* $2-1+2\times 0 = 1$), donc la variable d'écart y_4 de y_{op} est nulle, ce qui donne $y_{op} = (2,1,0,0)$. Par ailleurs, on sait que toute solution de base s'écrit sous la forme $\binom{B^{-1}b}{0_N}$. Puisque la forme standard contient deux contraintes d'égalités et quatre variables, alors B et N sont toutes les deux d'ordre 2. D'un autre côté, la solution optimale y_{op} admet deux composantes non nulles et deux composante nulles. Donc, les coordonnées $y_1 = 2$ et $y_2 = 1$ correspondent aux variables de base optimale. Il en découle que

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

est la base optimale associée à y_{op}.

Pour répondre à la dernière question, il est impératif d'établir le problème dual. Celui-ci s'écrit de la manière suivante :

$$\begin{cases} \min[\psi(v_1,v_2) = 4v_1 + v_2] \\ v_1 + v_2 \geq 3 \\ 2v_1 - v_2 \geq 0 \\ v_1 + 2v_2 \geq 4 \\ v_1 \text{ s. r. s et } v_2 \geq 0. \end{cases}$$

D'après le Théorème 6.2.4, la solution optimale $v_{op} = (v_1, v_2)$ de ce dual vérifie :

$$v^*_{op}B = c^*_B \iff \begin{pmatrix} v_1 & v_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\iff \begin{cases} v_1 + v_2 = 3 \\ 2v_1 - v_2 = 0 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} v_1 = 1 \\ v_2 = 2. \end{cases}$$

Donc $(1,2)$ est une solution optimale du problème dual. Noter que v_{op} vérifie bien $\psi(v_{op}) = Z(x_{op}) = 6$.

Dans l'énoncé du Corollaire 6.2.2, il est écrit que l'égalité $Z(x_{op}) = \psi(v_{op})$ constitue une condition suffisante d'optimalité pour le primal-dual, sous réserve que les points x_{op} et v_{op} soient tous les deux réalisables. Nous allons voir que cette égalité est aussi une condition nécessaire d'optimalité.

Théorème 6.2.5 *Si $(\mathcal{P})$ admet une solution optimale x_{op}, alors $(\mathcal{D})$ admet aussi une solution optimale v_{op} et elle vérifie $\psi(v_{op}) = Z(x_{op})$.*

Démonstration. Grâce au Théorème 1.3.3, on peut supposer que la solution optimale x_{op} est un sommet du domaine réalisable relatif à $(\mathcal{P})$. D'après l'Exercice 2.6.11, la solution optimale y_{op} obtenue par l'intermédiaire du Théorème 2.1.1 est une solution de base. Pour le point y_{op}, il lui correspond une base B qui est bien évidemment optimale.

Traitons en premier lieu le cas où B est non dégénérée. Selon la propriété *(ii)* du Théorème 2.3.1, le vecteur des coûts réduits w_N^* est nécessairement négatif. En se référant à la démonstration du Théorème 6.2.4, $v_{op}^* = \tilde{c}_B^* B^{-1}$ est une solution optimale du problème dual $(\mathcal{D})$ qui vérifie bien $\psi(v_{op}) = Z(x_{op})$.

Supposons maintenant que B est dégénérée. Si cette base optimale satisfait l'inégalité $w_N^* \leq 0_N^*$, alors le même raisonnement que précédemment conduit au résultat voulu. Sinon, on ajoute des itérations du simplexe, autant que nécessaire, afin d'aboutir à une base réalisable B' ayant la même solution de base y_{op} et vérifiant $w_{N'}^* \leq 0_{N'}^*$.

□

On a déjà vu (paragraphe 2.2) que lorsqu'une base B est dégénérée, il existe une base différente B' qui admet la même solution de base que B. Ainsi, en cas de dégénérescence, on peut construire deux solutions optimales pour le dual $(\mathcal{D})$, à savoir $v_{op} = \tilde{c}_B^* B^{-1}$ et $v'_{op} = \tilde{c}_{B'}^* B'^{-1}$. Etant donné que le domaine réalisable du problème dual est convexe, toute combinaison convexe de v_{op} et v'_{op} est optimale. Bien que les deux bases B et B' soient différentes, il est envisageable que les points v_{op} et v'_{op} soient confondus. En conclusion, lorsque la forme standard du primal $(\mathcal{P})$ admet une base optimale dégénérée, le problème dual $(\mathcal{D})$ admet une infinité de solutions optimales pourvu que $v_{op} \neq v'_{op}$. Dans l'Exercice 6.5.8, on propose un exemple sur l'unicité de solution optimale du dual et ce en dépit de la dégénérescence de la base optimale du primal.

6.2.2 Ecarts complémentaires

La méthode des écarts complémentaires permet de déterminer une solution optimale du dual sans passer par la forme standard du primal. Bien sûr, il faut disposer au préalable d'une solution optimale du primal. La recherche d'une solution du dual s'effectue alors à travers la résolution d'un système linéaire, sans recours à l'algorithme du simplexe.

Théorème 6.2.6 (des écarts complémentaires) *Soit $x_{op} = (x_1, \dots, x_p)$ et $v_{op} = (v_1, \dots, v_m)$ deux solutions optimales de $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{D})$ respectivement. Alors, on a :*

$$\begin{cases} v_i(b_i - \sum_{j=1}^{p} a_{ij}x_j) = 0, \ \forall i = 1, \dots, l \\ x_j(\sum_{i=1}^{m} v_i a_{ij} - c_j) = 0, \ \forall j = 1, \dots, k. \end{cases}$$

Démonstration. Par hypothèse, les deux solutions x_{op} et v_{op} sont optimales, elles sont donc réalisables. Alors, on obtient :

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{k} c_j x_j \leq \sum_{j=1}^{k} x_j \sum_{i=1}^{m} v_i a_{ij} \\ \sum_{j=k+1}^{p} c_j x_j = \sum_{j=k+1}^{p} x_j \sum_{i=1}^{m} v_i a_{ij} \end{cases} \quad \begin{cases} \sum_{i=1}^{l} v_i \sum_{j=1}^{p} a_{ij}x_j \leq \sum_{i=1}^{l} v_i b_i \\ \sum_{i=l+1}^{m} v_i \sum_{j=1}^{p} a_{ij}x_j = \sum_{i=l+1}^{m} v_i b_i \end{cases} \tag{6.1}$$

En faisant la somme terme à terme, on obtient :

$$\sum_{j=1}^{p} c_j x_j \leq \sum_{j=1}^{p} \sum_{i=1}^{m} v_i a_{ij} x_j \leq \sum_{i=1}^{m} v_i b_i \tag{6.2}$$

Puisque x_{op} et v_{op} sont optimales pour $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{D})$, on a nécessairement $Z(x_{op}) = \psi(v_{op})$, c'est à dire :

$$\sum_{j=1}^{p} c_j x_j = \sum_{i=1}^{m} v_i b_i.$$

En injectant cette dernière égalité dans (6.2), on obtient :

$$\sum_{j=1}^{p} c_j x_j = \sum_{j=1}^{p} \sum_{i=1}^{m} v_i a_{ij} x_j = \sum_{i=1}^{m} v_i b_i \tag{6.3}$$

Compte tenu de la propriété (6.3) et des deux égalités qui figurent dans (6.1), il en découle ce qui suit :

$$\sum_{i=1}^{l} v_i b_i = \sum_{i=1}^{l} v_i \sum_{j=1}^{p} a_{ij} x_j \text{ et } \sum_{j=1}^{k} c_j x_j = \sum_{j=1}^{k} x_j \sum_{i=1}^{m} v_i a_{ij},$$

ou encore

$$\sum_{i=1}^{l} v_i (b_i - \sum_{j=1}^{p} a_{ij} x_j) = 0 \text{ et } \sum_{j=1}^{k} x_j (\sum_{i=1}^{m} v_i a_{ij} - c_j) = 0.$$

La positivité des coefficients v_i et des termes $(b_i - \sum a_{ij}x_j)$ pour $i = 1,\ldots,l$ assure la nullité des produits $v_i(b_i - \sum a_{ij}x_j)$; de même pour les produits $x_j(\sum v_i a_{ij} - c_j)$ qui vont être nuls en raison de la positivité des coefficients x_j et $(\sum v_i a_{ij} - c_j)$ pour $j = 1,\ldots,k$.

□

Les conséquences du Théorème des écarts complémentaires sont immédiates. Supposons que l'on dispose d'une solution optimale $x_{op} = (x_1,\ldots,x_p)$ du primal $(\mathcal{P})$. Pour déterminer une solution optimale $v_{op} = (v_1,\ldots,v_m)$ du dual $(\mathcal{D})$, on procède de la façon suivante :

- pour chaque contrainte d'inégalité $i \in \{1,\ldots,l\}$ du primal, qui n'est pas **saturée** par le point x_{op} (*i.e.* $\sum a_{ij}x_j < b_i$ ou encore $b_i - \sum a_{ij}x_j > 0$), on a nécessairement $v_i = 0$.
- Parmi les contraintes de positivité $j \in \{1,\ldots,k\}$ du primal, retenir celles qui vérifient $x_j > 0$. Pour chacune d'entre elles, la contrainte j du dual est forcément saturée : $\sum_{i=1}^{m} v_i a_{ij} - c_j = 0$.

On ajoute à ces équations, les égalités $\sum a_{ij}v_i = c_j$; $j = k+1,\ldots,p$; qui figurent dans le problème dual. Ainsi, on obtient un système linéaire en v_{op} que l'on résout.

Inversement, si $v_{op} = (v_1,\ldots,v_m)$ est une solution optimale du dual, alors toute solution optimale $x_{op} = (x_1,\ldots,x_p)$ du primal vérifie :

- $x_j = 0$ pour chaque contrainte d'inégalité $j \in \{1,\ldots,k\}$ du dual, qui est non saturée par v_{op} : $\sum v_i a_{ij} > c_j$,
- et $b_i - \sum a_{ij}x_j = 0$ pour chaque contrainte de positivité $i \in \{1,\ldots,l\}$ du dual vérifiant $v_i > 0$.

Puisque x_{op} est réalisable, on ajoute à ces équations les égalité $\sum a_{ij}x_j = b_i$; $i = l+1,\ldots,m$; qui figurent dans les contraintes du primal.

Exemple 26 Trouver une solution optimale x_{op} du primal défini dans l'Exemple 25 à partir de la solution optimale $v_{op} = (1,2)$ du problème dual.

La deuxième variable v_2 du $v_{op} = (1,2)$, qui est positive dans les contraintes du dual, vérifie $v_2 = 2 > 0$. Donc, d'après le théorème des écarts complémentaire, la deuxième contrainte du primal est saturée :

$x_1 - x_2 + 2x_3 = 1$. Par ailleurs, la solution optimale v_{op} ne sature pas la troisième contrainte d'inégalité du dual ($v_1 + 2v_2 = 1 + 4 = 5 > 4$), donc $x_3 = 0$. En tenant compte de la première contrainte du primal, qui est une égalité, on obtient le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 4 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 1 \\ x_3 = 0. \end{cases}$$

Il est facile de vérifier que $x_{op} = (2, 1, 0)$ est la solution de ce système linéaire.

6.2.3 Optimum infini

Essayons d'étudier les conséquences sur le problème dual lorsque l'optimum du primal est infini.

Théorème 6.2.7 *Si l'optimum du primal est infini alors le domaine réalisable du dual est vide. La réciproque est également vraie.*

Démonstration. Nous allons démontrer ce résultat par contraposé. Dans cet ordre d'idée, on suppose que le domaine réalisable du dual n'est pas vide. Cela signifie qu'il existe un élément admissible v pour $(\mathcal{D})$. D'après le Lemme 6.2.1, tout point réalisable x pour le primal $(\mathcal{P})$ vérifie $Z(x) \leq \psi(v)$. Ainsi, la fonction d'objectif Z est majorée sur son domaine réalisable, et par conséquent l'optimum du primal ne peut guère être infini.

Inversement, si l'optimum du primal est fini, il en est de même pour le dual. Par conséquent, le domaine réalisable du dual est non vide.

□

Il se peut que les domaines réalisables du primal et de son dual soient tous deux vides. Cette situation est tout à fait envisageable comme le montre l'Exercice 6.5.6. Avec la convention $\min \emptyset = \infty$, le théorème précédent reste valide. Dans la pratique, le fait de trouver des contraintes incompatibles n'exprime pas une anomalie au niveau du problème étudié mais une mauvaise formulation de celui-ci.

Exemple 27 *Déterminer le dual de l'Exemple 3, et en déduire que l'optimum du primal est infini.*

On rappelle que ce (PL) admet un optimum infini et qu'il se présente de la manière suivante :

$$\begin{cases} \max[Z(x_1, x_2) = x_1 + x_2] \\ \quad -x_1 + x_2 \quad \leq 1 \\ \quad -x_1 + 2x_2 \quad \leq 4 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Par définition, le problème dual s'écrit comme suit :

$$\begin{cases} \min[\psi(v_1, v_2) = v_1 + 4v_2] \\ \quad -v_1 - v_2 \quad \geq 1 \\ \quad v_1 + 2v_2 \quad \geq 1 \\ v_1 \geq 0,\ v_2 \geq 0. \end{cases}$$

Il est clair que la première contrainte $-v_1 - v_2 \geq 1$ est incompatible avec les contraintes de positivité $v_1 \geq 0$ et $v_2 \geq 0$. Cela prouve bien que le domaine réalisable du dual est vide. D'après le théorème précédent, l'optimum du primal est infini.

6.3 Tableaux formels

La méthode des tableaux formels permet de retrouver, directement et sans calcul, la solution optimale du dual à partir du dernier tableau simplexe ; celui-ci étant obtenu suite à la résolution du primal par l'algorithme du simplexe. Cependant, le champ d'application de cette méthode est restreint aux primaux écrits sous forme canonique. Seul le cas le plus significatif sera envisagé et étudié. Il s'agit bien entendu du cas où le primal admet un optimum fini. Dans le cas contraire, on vient de voir que le domaine réalisable du dual est vide.

On se donne un primal écrit sous forme canonique que l'on note (FCP). Le problème dual sera noté (FCD). La forme standard du problème (FCP) (*resp.* (FCD)) sera également notée (FSFCP) (*resp.* (FSFCD)). Chaque tableau simplexe relatif à (FSFCP) (*resp.* (FSFCD)) s'appelle **tableau primal** (*resp.* **tableau dual**). Dans ce paragraphe, nous allons construire à partir du dernier tableau primal, un autre tableau simplexe qui correspond à une solution optimale de la forme standard (FSFCD) du dual. Dans cette perspective, on propose le schéma suivant :

$$
\text{(FCP)}\begin{cases} \max[Z(x) = c^* x] \\ Ax \leq b \\ x \geq 0_{\mathbb{R}^p} \end{cases} \quad \overset{\text{Dual}}{\longrightarrow} \quad \text{(FCD)}\begin{cases} \min[\psi(v) = b^* v] \\ A^* v \geq c \\ v \geq 0_{\mathbb{R}^m} \end{cases}
$$

$$
\downarrow \ \text{Forme standard} \ \downarrow
$$

$$
\text{(FSFCP)}\begin{cases} \max[\tilde{Z}(y) = \tilde{c}^* y] \\ \tilde{M} y = \tilde{b} \\ y \geq 0_{\mathbb{R}^n} \end{cases} \qquad \text{(FSFCD)}\begin{cases} \min[\hat{\psi}(y) = \hat{c}^* y] \\ \hat{M} y = \hat{b} \\ y \geq 0_{\mathbb{R}^n}. \end{cases}
$$

Pour les formes standard (FSFCP) et (FSFCD), on a :

$$
\begin{cases} \tilde{c} = \binom{c}{0_{\mathbb{R}^m}}, \ \tilde{M} = [A \ \ I_m], \ \tilde{b} = b, \\ \hat{c} = \binom{b}{0_{\mathbb{R}^p}}, \ \hat{M} = [A^* \ \ -I_p], \ \hat{b} = c \end{cases} \quad \text{et } n = m + p \tag{6.4}
$$

Le nombre total n de variables structurelles est le même pour les deux formes standards. Cela n'aurait pu avoir lieu si le primal n'était pas écrit sous forme canonique. Regardons en effet le primal défini dans l'Exemple 25. Sa forme standard admet seulement 4 variables, alors que le nombre de variables pour la forme standard du dual est 6 (facile à vérifier). D'ailleurs, le primal considéré dans l'Exemple 25 n'est pas canonique. Le fait que le nombre de variables soit identique pour (FSFCP) et (FSFCD) est une donnée primordiale pour la définition du tableau formel.

Lors de la résolution du problème (FSFCP), on dispose, pour chaque base réalisable $\tilde{B}$, d'un tableau simplexe qui se présente comme suit :

$y_{i_1} \ \ldots \ y_{i_p}$		
$\tilde{\beta} = \tilde{B}^{-1}\tilde{N}$	$\tilde{B}^{-1}\tilde{b}$	$y_{i_{p+1}}$ $\vdots$ y_{i_n}
$w^*_{\tilde{N}} = \tilde{c}^*_{\tilde{N}} - \tilde{c}^*_{\tilde{B}}\tilde{\beta}$	$\tilde{Z}$	

A chaque tableau primal, nous allons construire un nouveau tableau pour la forme standard (FSFCD). Celui-ci s'appelle **tableau formel**, il est obtenu via la correspondance suivante :

$y_{i_1} \ \ldots \ y_{i_p}$		
$\tilde{\beta}$	$\tilde{B}^{-1}\tilde{b}$	$y_{i_{p+1}} \ \vdots \ y_{i_n}$
$w^*_{\tilde{N}}$	$\tilde{Z}$	

↓ Tableau formel

$y_{j_{p+1}} \ \ldots \ y_{j_n}$		
$-\tilde{\beta}^*$	$-w_{\tilde{N}}$	$y_{j_1} \ \vdots \ y_{j_p}$
$-(\tilde{B}^{-1}\tilde{b})^*$	$\hat{\psi}$	

Les variables de base $y_{i_{p+1}}, \ldots, y_{i_n}$ vont être plaçées en hors base dans le tableau formel mais avec une indexation j_l, à la place de i_l, qui est définie par la relation de congruence :

$$j_l \equiv i_l + m \ [n].$$

De même pour les variables hors base $y_{i_1}, \ldots, y_{i_p}$ qui doivent être modifiées en variables de base dans le tableau formel selon la même règle d'indexation. Concernant l'élément $\hat{\psi}$ figurant en bas du tableau formel, on lui attribue la même valeur que $\tilde{Z}$ du tableau primal. Nous verrons dans le théorème suivant que le tableau formel correspond à un tableau simplexe pour le problème (FSFCD). Cependant, la base associée à ce tableau est généralement non réalisable. Cela est dû au fait que le vecteur $-w_{\tilde{N}}$ n'est pas à fortiori positif (voir tableau formel). Il ne devient positif qu'au bout de la dernière itération. A ce moment là, on aura une base réalisable $\hat{B}$ qui vérifie $\hat{B}^{-1}\hat{b} = -w_{\tilde{N}} \geq 0_{\tilde{N}}$.

Théorème 6.3.1 *Pour le tableau formel, la matrice associée au système de variables $\{y_{j_1}, \ldots, y_{j_p}\}$ est une base pour le problème (FSFCD). En outre, le tableau formel correspond exactement au tableau simplexe relatif à cette base.*

Démonstration. Sans perte de généralité, on suppose que le second membre $\tilde{b}$ est positif. Ainsi, la résolution de (FSFCP) par le simplexe peut démarrer par la base réalisable $\tilde{B} = I_m$. Le système de variables de base relatif à $\tilde{B} = I_m$ correspond aux variables d'écart $y_{p+1}, \ldots, y_n$.

Etant donné que $\tilde{M} = [A \;\; I_m]$ et $\tilde{B} = I_m$, la matrice $\tilde{N}$ se voit identifiée à A. Par ailleurs, compte tenu de l'égalité $\tilde{c} = \binom{c}{0_{\mathbb{R}^m}}$, on obtient $\tilde{c}^*_{\tilde{B}} = 0^*_{\mathbb{R}^m}$ et $\tilde{c}^*_{\tilde{N}} = c^*$. Donc, pour le premier du tableau primal, on a :

$$y_{i_l} = y_l, \; \tilde{\beta} = \tilde{B}^{-1}\tilde{N} = \tilde{N} = A, \; \tilde{B}^{-1}\tilde{b} = \tilde{b} = b \text{ et } w^*_N = \tilde{c}^*_{\tilde{N}} = c^*.$$

Autrement dit, le premier tableau primal se présente comme suit :

$y_1 \;\dots\; y_p$		
A	b	y_{p+1} $\vdots$ y_n
c^*	0	

Si on tient compte de la relation de congruence $j_l \equiv i_l + m \; [n]$ et du fait que $n = m + p$, le premier tableau formel paraîtra sous la forme suivante :

$y_1 \;\dots\; y_m$		
$-A^*$	$-c$	y_{m+1} $\vdots$ y_n
$-b^*$	0	

D'après (6.4), on a $\hat{M} = [A^* \;\; -I_p]$. Donc, les variables $y_{m+1}, \dots, y_n$ correspondent aux variables d'écart qui ont été ôtées des inégalités $A^*v \geq c$. La matrice relative à ces variables est $\hat{B} = -I_p$, celle-ci constitue bien une base. D'un autre côté et selon les égalités (6.4), on a $\hat{M} = [A^* \;\; -I_p]$, $\hat{b} = c$ et $\hat{c} = \binom{b}{0_{\mathbb{R}^p}}$. Ainsi, pour la base $\hat{B} = -I_p$, on vérifie aisément que le tableau simplexe associé correspond effectivement au tableau formel décrit ci-dessus. De cette façon, le résultat du théorème se trouve validé pour le premier tableau formel.

Afin de passer au deuxième tableau primal, il va falloir déterminer le pivot, que l'on suppose égal à a_{rs}. Compte tenu des formules itératives établies au chapitre 2, on aura la correspondance (tableau primal $\longrightarrow$ tableau formel) suivante :

y_1	$\cdots$	y_{p+r}	$\cdots$	y_p		
$\bar{a}_{11}$	$\cdots$	$-\frac{a_{1s}}{a_{rs}}$	$\cdots$	$\bar{a}_{1p}$	b_1	y_{p+1}
$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\frac{a_{r1}}{a_{rs}}$	$\cdots$	$\frac{1}{a_{rs}}$	$\cdots$	$\frac{a_{rp}}{a_{rs}}$	$\frac{b_r}{a_{rs}}$	y_s
$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\bar{a}_{m1}$	$\cdots$	$-\frac{a_{ms}}{a_{rs}}$	$\cdots$	$\bar{a}_{mp}$	$\bar{b}_m$	y_n
$\bar{c}_1$	$\cdots$	$-\frac{c_s}{a_{rs}}$	$\cdots$	$\bar{c}_p$	$\frac{b_r}{a_{rs}}c_s$	

↓ Tableau formel

y_1	$\cdots$	y_{m+s}	$\cdots$	y_m		
$-\bar{a}_{11}$	$\cdots$	$-\frac{a_{r1}}{a_{rs}}$	$\cdots$	$-\bar{a}_{m1}$	$-\bar{c}_1$	y_{m+1}
$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\frac{a_{1s}}{a_{rs}}$	$\cdots$	$-\frac{1}{a_{rs}}$	$\cdots$	$\frac{a_{ms}}{a_{rs}}$	$\frac{c_s}{a_{rs}}$	y_r
$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$-\bar{a}_{1p}$	$\cdots$	$-\frac{a_{rp}}{a_{rs}}$	$\cdots$	$-\bar{a}_{mp}$	$-\bar{c}_p$	y_n
$-\bar{b}_1$	$\cdots$	$-\frac{b_r}{a_{rs}}$	$\cdots$	$-\bar{b}_m$	$\frac{b_r}{a_{rs}}c_s$	

Les coefficients $\bar{a}_{ij}$, $\bar{b}_i$ et $\bar{c}_j$ vérifient les relations suivantes :

$$\begin{cases} \bar{a}_{ij} = a_{ij} - \frac{a_{is}a_{rj}}{a_{rs}} & \text{pour } i \neq r \text{ et } j \neq s \\ \bar{b}_i = b_i - \frac{a_{is}b_r}{a_{rs}} & \text{pour } i \neq r \\ \bar{c}_j = c_j - \frac{c_s a_{rj}}{a_{rs}} & \text{pour } j \neq s. \end{cases}$$

Intéressons nous aux variables $y_{m+1}, \cdots, y_{m+s-1}, y_r, y_{m+s+1}, \cdots, y_n$ qui figurent à droite du tableau formel. La matrice associée est :

$$\hat{B} = \begin{pmatrix} -1 & & a_{r1} & & \\ & \ddots & \vdots & & \\ & & a_{rs} & & \\ & & \vdots & \ddots & \\ & & a_{rp} & & -1 \end{pmatrix}.$$

Il est clair que $\hat{B}$ est une base, c'est à dire inversible. Nous allons montrer à présent que le deuxième tableau formel correspond au tableau simplexe relatif à cette base $\hat{B}$. Tout d'abord, on vérifie facilement que :

$$\hat{B}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & & \frac{a_{r1}}{a_{rs}} & & \\ & \ddots & \vdots & & \\ & & \frac{1}{a_{rs}} & & \\ & & \vdots & \ddots & \\ & & \frac{a_{rp}}{a_{rs}} & & -1 \end{pmatrix}.$$

Puisque le second membre du problème dual est $\hat{b} = c$, la solution de base associée à $\hat{B}$ vérifie :

$$\hat{B}^{-1}\hat{b} = \hat{B}^{-1}c = \begin{pmatrix} -c_1 + \frac{a_{r1}}{a_{rs}}c_s \\ \vdots \\ \frac{c_s}{a_{rs}} \\ \vdots \\ -c_p + \frac{a_{rp}}{a_{rs}}c_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\bar{c}_1 \\ \vdots \\ \frac{c_s}{a_{rs}} \\ \vdots \\ -\bar{c}_p \end{pmatrix}.$$

On retrouve exactement les éléments qui figurent à l'endroit réservé à cet effet dans le tableau formel.

Par ailleurs, les variables hors base $y_1, \ldots, y_{r-1}, y_{m+s}, y_{r+1}, \ldots, y_m$ du tableau formel nous conduisent à la matrice :

$$\hat{N} = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & 0 & \ldots & a_{m1} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{1s} & \ldots & -1 & \ldots & a_{ms} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{1p} & \ldots & 0 & \ldots & a_{mp} \end{pmatrix}.$$

Grâce aux expressions de $\hat{B}^{-1}$ et $\hat{N}$, on montre assez facilement que $\hat{B}^{-1}\hat{N}$ coïncide avec les éléments du tableau formel figurant à l'endroit de $\hat{\beta}$.

Enfin, le vecteur des coûts réduits associé à la base $\hat{B}$ vérifie :

$$\begin{aligned} w^*_{\hat{N}} &= \hat{c}^*_{\hat{B}}\hat{B}^{-1}\hat{N} - \hat{c}^*_{\hat{N}} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & \ldots & b_r & \ldots & 0 \end{pmatrix}\hat{\beta} \\ &- \begin{pmatrix} b_1 & \ldots & b_{r-1} & 0 & b_{r+1} & \ldots & b_m \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Nous tenons à préciser que le coefficient b_r figure à la $s^{\text{ième}}$ coordonnée du vecteur $(0 \ldots b_r \ldots 0)$. Donc, on obtient :

$$\begin{aligned} w^*_{\hat{N}} &= -\begin{pmatrix} b_1 & \ldots & b_{r-1} & 0 & b_{r+1} & \ldots & b_m \end{pmatrix} + b_r\hat{\beta}_{s\bullet} \\ &= -\begin{pmatrix} b_1 & \ldots & b_{r-1} & 0 & b_{r+1} & \ldots & b_m \end{pmatrix} \\ &+ b_r\begin{pmatrix} \frac{a_{1s}}{a_{rs}} & \ldots & -\frac{1}{a_{rs}} & \ldots & \frac{a_{ms}}{a_{rs}} \end{pmatrix} \\ &= -\begin{pmatrix} \bar{b}_1 & \ldots & \frac{b_r}{a_{rs}} & \ldots & \bar{b}_m \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Il s'agit véritablement des mêmes coefficients figurant à l'emplacement du vecteur des coûts réduits du tableau formel. Pour la valeur $\frac{b_r}{a_{rs}}c_s$,

située en bas à droite du tableau formel, on vérifie aisément qu'elle correspond à la valeur d'objectif $\hat{\psi}$ au point $\hat{y}$ défini par :

$$\begin{cases} \hat{y}_i = 0 & \text{pour } i = 1, \dots, m \text{ et } i \neq r \\ \hat{y}_r = \frac{c_s}{a_{rs}} & \text{et } y_{m+s} = 0 \\ \hat{y}_i = -\bar{c}_i & \text{pour } i = m+1, \dots, n \text{ et } i \neq m+s. \end{cases}$$

Ainsi, le résultat de ce théorème est justifié pour le deuxième tableau formel. Le raisonnement est identique pour les tableaux qui suivent.

□

A Chaque itération primale du simplexe lui correspond un tableau formel qui constitue en l'occurrence un tableau dual pour une base non réalisable. Nous allons voir que cette base du dual ne devient réalisable qu'au cours du dernier tableau primal. A ce stade, cette base est non seulement réalisable mais optimale aussi.

Théorème 6.3.2 *Si le dernier tableau simplexe de (FSFCP) vérifie* $w^*_{\tilde{N}} \leq 0^*_{\tilde{N}}$*, alors le tableau formel associé correspond à une base réalisable, qui est optimale pour (FSFCD).*

Démonstration. Considérons le vecteur $y^{(0)} = (y_{j_1}, \dots, y_{j_n})$ défini par :

$$\begin{pmatrix} y_{j_1} \\ \vdots \\ y_{j_p} \end{pmatrix} = -w_{\tilde{N}} \text{ et } \begin{pmatrix} y_{j_{p+1}} \\ \vdots \\ y_{j_n} \end{pmatrix} = 0_{\mathbb{R}^m}.$$

Puisque le tableau formel est un tableau simplexe, le point $y^{(0)}$ n'est autre que la solution de base associée au système de variables de base $\{y_{j_1}, \dots, y_{j_p}\}$. Ainsi, l'égalité $\hat{M}y^{(0)} = \hat{b}$ se trouve satisfaite. D'autre part, l'hypothèse $w^*_{\tilde{N}} \leq 0^*_{\tilde{N}}$ conduit à l'inégalité $-w_{\tilde{N}} \geq 0_{\mathbb{R}^p}$, ce qui permet d'affirmer que $y^{(0)}$ est réalisable ($\hat{M}y^{(0)} = \hat{b}$ et $y^{(0)} \geq 0_{\mathbb{R}^n}$) pour (FSFCD).

Notons par $\tilde{B}$ la base optimale primale. On sait que le vecteur $\tilde{B}^{-1}\tilde{b}$ est positif étant donnée que la base $\tilde{B}$ est réalisable. Selon la définition du tableau formel, le vecteur $-(\tilde{B}^{-1}\tilde{b})^*$ correspond au vecteur des coûts réduits pour le tableau formel. La négativité de $-(\tilde{B}^{-1}\tilde{b})^*$ dans le tableau formel correspond alors à une condition suffisante d'optimalité de $y^{(0)}$ pour le problème (FSFCD).

□

L'intérêt du Théorème 6.3.2 est double. D'un côté, il assure la résolution des deux problèmes (FCP) et (FCD) par une seule exécution de l'algorithme du simplexe sur l'un d'entre eux. D'un autre côté, il permet dans une situation particulière d'initialiser facilement l'algorithme du simplexe. Supposons, en effet, que l'on ait à résoudre une (FC) pour laquelle la matrice identité ne constitue pas une base réalisable. Au lieu d'en chercher une par la méthode des deux phases ou la méthode du grand M, on regarde plutôt le problème dual. Si celui-ci dispose d'une base réalisable initiale évidente, il est plus avantageux de résoudre le dual par le simplexe ; ensuite la solution du primal sera déduite via le tableau formel relatif au dernier tableau primal.

Exemple 28 Déterminer le dual du (PL) défini dans l'Exemple 1, puis proposer une solution optimale de ce dual.

On rappelle que le (PL) traité dans l'Exemple 1 est :

$$\begin{cases} \max[Z(x_1,x_2) = 4x_1 + 5x_2] \\ 2x_1 + x_2 \leq 8 \\ x_1 + 2x_2 \leq 7 \\ x_2 \leq 3 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Par définition, le dual s'écrit comme suit :

$$\begin{cases} \min[\psi(v) = 8v_1 + 7v_2 + 3v_3] \\ 2v_1 + v_2 \geq 4 \\ v_1 + 2v_2 + v_3 \geq 5 \\ v = (v_1, v_2, v_3) \geq 0_{\mathbb{R}^3}. \end{cases}$$

D'ores et déjà, on constate que la matrice identité n'est pas une base réalisable pour le dual alors qu'elle l'est pour le primal. La résolution du primal par le simplexe nous avait conduit au tableau final suivant :

y_4	y_3		
$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	1	y_5
$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	3	y_1
$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	2	y_2
-2	-1	22	

Afin de construire le tableau formel, on effectue les petites manipulations suivantes :

- les variables de base y_5, y_1 et y_2 deviennent hors base et se transforment respectivement en y_3, y_4 et y_5. Aussi, les variables hors base y_4 et y_3 se trouvent modifiées en y_2 et y_1. Ces transformations sont obtenues selon la relation de congruence $j_l \equiv i_l + 3$ [5], étant donné que le nombre de contraintes d'inégalités est $m = 3$ et le nombre de variables dans la forme standard est $n = 5$.
- A l'endroit réservé à la matrice $\beta = B^{-1}N$, on met $-\beta^*$.
- Le vecteur $-w_N = \binom{2}{1}$ occupe la place dédiée habituellement à la solution de base réalisable.
- A la dernière ligne (vecteur des coûts réduits et $\hat{\psi}$), on place consécutivement $-(B^{-1}b)^* = -(1\ \ 3\ \ 2)$ et $Z = 22$.

Ainsi, le tableau formel relatif au tableau simplexe ci-dessus est :

y_3	y_4	y_5		
$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	2	y_2
$-\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	1	y_1
-1	-3	-2	22	

D'après ce tableau, on peut affirmer que $(1, 2, 0)$ est une solution optimale du problème dual. D'ailleurs, on remarque que l'égalité $Z(3, 2) = \psi(1, 2, 0)$ est bien satisfaite. En résolvant le problème dual par le simplexe, nous allons retrouver le tableau formel décrit ci-dessus dans la dernière itération. On laisse au lecteur le soin de vérifier cette constatation. Par ailleurs, on aimerait préciser que les opérations régissant la correspondance “tableau simplexe → tableau formel” seraient les mêmes si le primal était de type minimisation.

Les tableaux formels ont un intérêt pratique pour la résolution des problèmes de programmation linéaire. Supposons que le primal canonique possède un nombre réduit de variables de décision, mais un grand nombre de contraintes, le domaine réalisable du primal aura un nombre considérable de sommets, puisque ce nombre est proportionnel au nombre de contraintes. On sait qu'à chaque itération de l'algorithme du simplexe, correspond un sommet du domaine réalisable. En résolvant le dual à la place du primal, on aura affaire à un problème ayant un petit nombre de contraintes et un grand nombre de variables structurelles. Ainsi, le nombre d'itérations exigées pour obtenir une solution optimale

serait plus réduit avec le dual qu'avec le primal. En ce qui concerne la solution du primal, elle sera déduite du tableau formel relatif au dernier tableau simplexe du dual.

En réalité, la restriction faite sur la méthode des tableaux formels peut être surmontée. Plus précisément, la résolution d'un primal arbitraire $(\mathcal{P})$ peut être envisagée par les tableaux formels même lorsque celui-ci n'est pas canonique. Pour ce faire, il suffit d'écrire $(\mathcal{P})$ sous forme canonique. Cette tache ne pose aucune difficulté : seules les contraintes d'égalité doivent être remplaçées par une double inégalité, et chaque variable s. r. s. doit être changée par la différence de deux variables positives. La forme standard sera écrite par la suite à partir de cette forme canonique. Bien sûr, cette opération a pour effet d'augmenter le nombre de contraintes, et d'emblée le nombre de variables d'écart. Cela entraîne, sans doute, un coût supplémentaire à l'algorithme du simplexe.

Exemple 29 En utilisant la méthode des tableaux formels, donner une solution optimale du primal défini dans l'Exemple 25 et de son dual.

Il faut tout d'abord écrire le (PL) traité dans l'Exemple 25 sous forme canonique :

$$\begin{cases} \max[Z(x) = 3x_1 + 4x_3] \\ x_1 + 2x_2 + x_3 \quad \leq 4 \\ -x_1 - 2x_2 - x_3 \quad \leq -4 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 \quad \leq 1 \\ x = (x_1, x_2, x_3) \geq 0_{\mathbb{R}^3}. \end{cases}$$

La forme standard est :

$$\begin{cases} \max[Z(y) = 3y_1 + 4y_3] \\ y_1 + 2y_2 + y_3 + y_4 \quad = 4 \\ -y_1 - 2y_2 - y_3 + y_5 \quad = -4 \\ y_1 - y_2 + 2y_3 + y_6 \quad = 1 \\ y = (y_1, \ldots, y_6) \geq 0_{\mathbb{R}^6}. \end{cases}$$

Noter que la forme standard contient cette fois-ci 6 variables structurelles et 3 contraintes d'égalité. Lorsque la forme standard était écrite directement à partir du primal, on avait obtenu seulement 4 variables et 2 contraintes d'égalité. On vérifie aisément que le dernier tableau simplexe est :

y_6	y_4	y_3		
0	1	0	0	y_5
$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	1	y_2
$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{3}$	2	y_1
-2	-1	-1	6	

Grâce à ce tableau, on peut affirmer que $(2,1,0)$ est une solution optimale du primal. Par définition, le tableau formel relatif au tableau simplexe ci-dessus est :

y_2	y_5	y_4		
0	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	2	y_3
-1	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	1	y_1
0	$\frac{1}{3}$	$-\frac{5}{3}$	1	y_6
0	-1	-2	6	

D'autre part, le dual de la forme canonique du primal s'écrit de la façon suivante :

$$\begin{cases} \min[\psi(v) = 4v_1 - 4v_2 + v_3] \\ v_1 - v_2 + v_3 \geq 3 \\ 2v_1 - 2v_2 - v_3 \geq 0 \\ v_1 - v_2 + 2v_3 \geq 4 \\ v = (v_1, v_2, v_3) \geq 0_{\mathbb{R}^3}. \end{cases}$$

Ainsi, la forme standard est :

$$\begin{cases} \min[\psi(y) = 4y_1 - 4y_2 + y_3] \\ y_1 - y_2 + y_3 - y_4 = 3 \\ 2y_1 - 2y_2 - y_3 - y_5 = 0 \\ y_1 - y_2 + 2y_3 - y_6 = 4 \\ y = (y_1, \ldots, y_6) \geq 0_{\mathbb{R}^6}. \end{cases}$$

D'ores et déjà, on peut constater que les deux formes standards possèdent le même nombre de variables structurelles. D'après le tableau formel, on est capable de dire que $(1,0,2)$ est une solution optimale de la forme canonique duale. Si on effectue le changement de variables $u_1 = v_1 - v_2$ et $u_2 = v_3$, la forme canonique duale sera équivalente à :

$$\begin{cases} \min[\psi(u_1, u_2) = 4u_1 + u_2] \\ u_1 + u_2 \geq 3 \\ 2u_1 - u_2 \geq 0 \\ u_1 + 2u_2 \geq 4 \\ u_1 \text{ s. r. s. et } u_2 \geq 0. \end{cases}$$

Il s'agit exactement du problème dual que l'on a trouvé auparavant lors de la résolution de l'Exemple 25. Compte tenu du changement de variables $u_1 = v_1 - v_2$; $u_2 = v_3$ et du point optimal $(1, 0, 2)$, on déduit que $(1 - 0, 2) = (1, 2)$ est une solution optimale du problème dual.

6.4 Algorithme dual - simplexe

Comme indiqué au paragraphe précédent, le tableau formel correspond à un tableau dual pour une base qui est non réalisable. C'est seulement à la dernière itération que la base du tableau formel devient réalisable et en l'occurrence optimale. Par définition, le vecteur des coûts réduits $w^*_{\tilde{N}}$ pour le tableau formel est égal à $-(\tilde{B}^{-1}\tilde{b})^*$ où $\tilde{B}$ est la base réalisable du tableau primal. La condition d'optimalité ($w^*_{\tilde{N}} = -(\tilde{B}^{-1}\tilde{b})^* \leq 0^*_{\tilde{N}}$) est donc vérifiée pour le dual, et ceci pour tous les tableaux formels. Pour chaque itération du simplexe, la valeur d'objectif $\tilde{Z}$ est supérieure à la valeur de l'itération précédente ($\tilde{Z} \leftarrow \tilde{Z} + \lambda w_s$, avec $w_s > 0$ et $\lambda \geq 0$). D'un autre côté, la valeur d'objectif $\hat{\psi}$ du tableau formel vérifie $\hat{\psi} = \tilde{Z}$. Ces deux dernières constatations nous conduisent à affirmer que la valeur d'objectif $\hat{\psi}$ augmente d'un tableau formel au tableau subséquent, et cela en dépit du fait que le minimum, et non le maximum, de $\hat{\psi}$ qui est recherché. En résumé, les tableaux formels (mise à part le dernier) permettent de générer une suite de solutions de base pour le dual qui vérifient les propriétés suivantes :

- elles sont non réalisables,
- elles vérifient toutes la condition d'optimalité,
- chacune possède une valeur d'objectif $\hat{\psi}$ plus mauvaise que la précédente.

Le dernier tableau permet d'atteindre l'optimalité pour le problème dual. Cette suite de solutions de base non réalisable peut être interprétée comme une nouvelle approche en programmation linéaire. Plutôt que de construire une suite de solutions de base réalisable qui améliorent la valeur de la fonction d'objectif, pourquoi ne pas produire une suite de solutions de base non réalisable, vérifiant la condition d'optimalité et ayant une valeur d'objectif qui se détériore au fur et à mesure ? C'est exactement ce que fait l'algorithme dual-simplexe. Cet algorithme a été

introduit et développé par Lemke [21] en 1954.

Supposons à présent que l'on résolve un (PL) qui admette une base triviale non réalisable dont le vecteur des coûts réduits vérifie la condition d'optimalité. Les règles de changement de base pour l'algorithme dual-simplexe se déduisent immédiatement de l'algorithme du simplexe et de la correspondance "tableau primal → tableau formel".

Algorithme du simplexe	Algorithme dual-simplexe
• On commence par déterminer la variable hors base entrante. Cela se fait par l'intermédiaire de l'indice s vérifiant : $\tilde{w}_s = \max\{\tilde{w}_i \;/\; \tilde{w}_i > 0\}$	• On commence par déterminer la variable de base sortante. Cela se fait par l'intermédiaire de l'indice r vérifiant : $(\hat{B}^{-1}\hat{b})_r = \min\{(\hat{B}^{-1}\hat{b})_i \;/\; \hat{B}^{-1}\hat{b})_i < 0\}$
• Pour déterminer la variable de base sortante, on calcule $\lambda = \min\{\frac{(\tilde{B}^{-1}\tilde{b})_i}{\tilde{\beta}_{is}} \;/\; \tilde{\beta}_{is} > 0\}$ puis, on détermine l'indice r pour lequel ce minimum est atteint.	• Pour déterminer la variable hors base entrante, on calcule $\alpha = \min\{\frac{\hat{w}_i}{\hat{\beta}_{ri}} \;/\; \hat{\beta}_{ri} < 0\}$ puis, on détermine l'indice s pour lequel ce maximum est atteint.

Par opposition à l'algorithme du simplexe, l'algorithme dual-simplexe détermine en premier lieu la variable sortante puis la variable entrante. Rappelons à cet effet que les variables hors base du tableau primal deviennent, à une relation de congruence près, des variables de base dans le tableau formel. Les pivots sont également strictement négatifs alors qu'ils sont strictement positifs pour l'algorithme du simplexe. Le choix du paramètre α (voir tableau précédent) assure que la solution de base, de l'itération d'après, vérifie la condition d'optimalité "$w^*_{\hat{N}} \leq 0^*_{\hat{N}}$". Les formules itératives du Chapitre 2 s'appliquent dans l'un comme dans l'autre algorithme, sans modification.

En ce qui concerne les règles d'arrêt de l'algorithme dual-simplexe, elles sont résumées dans le tableau suivant.

Algorithme du simplexe	Algorithme dual-simplexe
• Une fois $\tilde{w_s}$ déterminé, on regarde le signe de la colonne s de $\tilde{\beta}$. Si $\tilde{\beta}_{is} \leq 0$ pour tout i, l'optimum est infini. • Si $w^*_{\tilde{N}} \leq 0^*_{\tilde{N}}$, l'optimum est atteint.	• Une fois $(\hat{B}^{-1}\hat{b})_r$ déterminé, on regarde le signe de la ligne r de $\hat{\beta}$. Si $\tilde{\beta}_{rj} \geq 0$ pour tout j, l'optimum est infini. • Si $\hat{B}^{-1}\hat{b} \geq 0_{\hat{B}}$, l'optimum est atteint.

Tous les résultats décrits ci-dessus pour la méthode dual-simplexe peuvent être récapitulés dans l'algorithme ci-après.

Algorithm 5 : Algorithme dual-simplexe

Require: base non réalisable vérifiant $w^*_N = c^*_B B^{-1}N - c^*_N \leq 0^*_N$

Initialiser H, *base* et *hbase*

Calculer $SB_piv = \min\{H(i,p+1) \;/\; 1 \leq i \leq m\}$

while $SB_piv < 0$ **do**

déterminer l'indice r qui réalise le minimum SB_piv

if $H(r, 1:p) \geq 0^*_{\mathbb{R}^p}$ **then**

optimum infini /* $\inf_{y\in\mathcal{Y}} \psi(y) = -\infty$ */

exit

else

calculer $\alpha = \min\{\frac{H(m+1,j)}{H(r,j)}$; pour $j = 1,\ldots,p \;/\; H(r,j) < 0\}$

déterminer l'indice s pour lequel α est atteint

end if

$base(r) \leftrightarrow hbase(s)$

$piv = H(r,s)$

$H(r,j) \leftarrow \frac{H(r,j)}{piv}$ pour $j = 1,\ldots,p+1$ et $j \neq s$

$H(i,j) \leftarrow H(i,j) - H(r,j) * H(i,s)$ pour $i \neq r$ et $j \neq s$

$H(i,s) \leftarrow -\frac{H(i,s)}{piv}$ pour $i = 1,\ldots,m+1$ et $i \neq r$

calculer $SB_piv = \min\{H(i,p+1) \;/\; 1 \leq i \leq m\}$

end while

$opty(base(1:m)) = H(1:m, p+1)$

$opty(hbase(1:p)) = 0$

Minimum atteint en *opty* et il vaut $\psi = H(m+1, p+1)$

Cet algorithme est écrit pour un (PL) de type minimisation. Concernant les problèmes de type maximisation, l'algorithme dual-simplexe reste le même à une légère modification près. Il faut à cet effet changer l'égalité $\psi = H(m+1,p+1)$ par $Z = -H(m+1,p+1)$. Aussi, au niveau de l'initialisation de l'algorithme, le vecteur des coûts réduits doit être égal à $w^*_N = c^*_N - c^*_B B^{-1}N$ au lieu de $w^*_N = c^*_B B^{-1}N - c^*_N$.

L'application de l'algorithme dual-simplexe est un peu restrictive. Il peut être mis en œuvre uniquement si la base non réalisable initiale vérifie la condition d'optimalité "$w_N^* \leq 0_N^*$". D'ailleurs, il est conçu de sorte que, à chaque itération, la base retenue satisfait cette même condition d'optimalité. De ce fait, l'algorithme dual-simplexe s'arrête lorsque la base en cours devient réalisable.

Lorsqu'on résout un (PL) par l'algorithme dual-simplexe, on génère une série de tableaux qui correspondent exactement aux tableaux formels relatifs aux tableaux simplexe du problème dual. Autrement dit, la résolution d'un (PL) par l'algorithme dual-simplexe possède la même complexité temporelle que la résolution du dual par l'algorithme du simplexe. Par rapport à l'algorithme du simplexe standard, on éviter tout simplement l'opération de correspondance "tableau simplexe → tableau formel" sur le dernier tableau.

Exemple 30 Résoudre le (PL) suivant par la méthode dual-simplexe.

$$\begin{cases} \min[\psi(v) = 12v_1 + 10v_2 + 8v_3] \\ 3v_1 + 3v_2 + 4v_3 \geq 4 \\ 4v_1 + 3v_2 + 2v_3 \geq 3 \\ v = (v_1, v_2, v_3) \geq 0_{\mathbb{R}^3}. \end{cases}$$

L'écriture sous forme standard aboutit aux données suivantes :

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 4 & -1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \; b = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ et } c^* = \begin{pmatrix} 12 & 10 & 8 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Il est clair que $B = -I_2$ est une base non réalisable. Le vecteur des coûts réduits associé à cette base est égal à $w_N^* = -c_N^* = -(12 \;\; 10 \;\; 8)$. Ce vecteur vérifie bien la condition d'optimalité $w_N^* \leq 0_N^*$. Donc, l'algorithme dual-simplexe peut s'appliquer à cet exemple. Le fait que la condition $w_N^* = -c_N^* \leq 0_N^*$ soit vérifiée, équivaut à dire que la matrice identité constitue une base réalisable pour le problème dual.

<u>Itération 1</u>

y_1	y_2	y_3		
-3	-3	-4	-4	y_4
-4	-3	-2	-3	y_5
-12	-10	-8	0	

L'application de l'algorithme dual-simplexe est un peu restrictive. Il peut être mis en œuvre uniquement si la base non réalisable initiale vérifie la condition d'optimalité "$w_N^* \leq 0_N^*$". D'ailleurs, il est conçu de sorte que, à chaque itération, la base retenue satisfait cette même condition d'optimalité. De ce fait, l'algorithme dual-simplexe s'arrête lorsque la base en cours devient réalisable.

Lorsqu'on résout un (PL) par l'algorithme dual-simplexe, on génère une série de tableaux qui correspondent exactement aux tableaux formels relatifs aux tableaux simplexe du problème dual. Autrement dit, la résolution d'un (PL) par l'algorithme dual-simplexe possède la même complexité temporelle que la résolution du dual par l'algorithme du simplexe. Par rapport à l'algorithme du simplexe standard, on éviter tout simplement l'opération de correspondance "tableau simplexe → tableau formel" sur le dernier tableau.

Exemple 30 Résoudre le (PL) suivant par la méthode dual-simplexe.

$$\begin{cases} \min[\psi(v) = 12v_1 + 10v_2 + 8v_3] \\ 3v_1 + 3v_2 + 4v_3 \quad \geq 4 \\ 4v_1 + 3v_2 + 2v_3 \quad \geq 3 \\ v = (v_1, v_2, v_3) \geq 0_{\mathbb{R}^3}. \end{cases}$$

L'écriture sous forme standard aboutit aux données suivantes :

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 4 & -1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \; b = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ et } c^* = \begin{pmatrix} 12 & 10 & 8 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Il est clair que $B = -I_2$ est une base non réalisable. Le vecteur des coûts réduits associé à cette base est égal à $w_N^* = -c_N^* = -(12 \;\; 10 \;\; 8)$. Ce vecteur vérifie bien la condition d'optimalité $w_N^* \leq 0_N^*$. Donc, l'algorithme dual-simplexe peut s'appliquer à cet exemple. Le fait que la condition $w_N^* = -c_N^* \leq 0_N^*$ soit vérifiée, équivaut à dire que la matrice identité constitue une base réalisable pour le problème dual.

<u>Itération 1</u>

y_1	y_2	y_3		
-3	-3	-4	-4	y_4
-4	-3	-2	-3	y_5
-12	-10	-8	0	

On commence par déterminer la valeur minimale des composantes de $B^{-1}b = \binom{-4}{-3}$. Il s'agit de la valeur -4, qui est écrit en gras dans le tableau dual-simplexe. Afin de déterminer le pivot, il va falloir calculer

$$\alpha = \min\{\frac{-12}{-3}, \frac{-10}{-3}, \frac{-8}{-4}\}.$$

Il évident que $\alpha = 2$, par suite le pivot vaut -4.

<u>Itération 2</u>

y_1	y_2	y_4		
$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{4}$	1	y_3
$-\frac{5}{2}$	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\mathbf{-1}$	y_5
-6	-4	-2	8	

La solution de base non réalisable possède une seule composante strictement négative, qui est -1. De plus, on a :

$$\alpha = \max\{\frac{-6}{-\frac{5}{2}}, \frac{-4}{-\frac{3}{2}}, \frac{-2}{-\frac{1}{2}}\} = \frac{12}{5}.$$

<u>Itération 3</u>

y_5	y_2	y_4		
$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{10}$	$-\frac{2}{5}$	$\frac{7}{10}$	y_3
$-\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	y_1
$-\frac{12}{5}$	$-\frac{2}{5}$	$-\frac{4}{5}$	$\frac{52}{5}$	

On a $B^{-1}b \geq 0_B$, donc le minimum de ψ vaut $\frac{52}{5}$, il est atteint au point $v_{op} = (\frac{2}{5}, 0, \frac{7}{10})$.

En essayant de résoudre le dual de cet exemple par le simplexe, nous trouvons trois tableaux simplexe qui correspondent exactement aux tableaux formels des trois tableaux ci-dessus. Par ailleurs, il est intéressant de remarquer que la méthode de la base non réalisable est également applicable à cet exemple. On laisse au lecteur le soin de constater que les deux méthodes génèrent des tableaux simplexe qui ne sont pas tous identiques. Cela veut dire que la conception de l'algorithme dual-simplexe et celle de la méthode de la base non réalisable sont différentes. L'Exercice 6.5.3 propose une autre application en vue d'éclairer ces deux dernières remarques.

L'algorithme dual-simplexe peut être d'une utilité inéluctable en programmation linéaire. Supposons que l'on s'intéresse à une paramétrisation du second membre. Si le paramètre θ est en dehors de l'intervalle de stabilité, la base optimale B du problème initial devient non réalisable pour le problème paramétré. Toutefois, le vecteur des coûts réduits w_N^*, qui est indépendant du second membre, demeure inchangé. La base B en question vérifie ainsi les conditions d'application de l'algorithme dual-simplexe, à savoir :

- B est une base non réalisable.
- B vérifie la condition d'optimalité.

Au lieu de résoudre le problème paramétré par l'algorithme du simplexe, il est plus commode, dans ces circonstances, d'appliquer l'algorithme dual-simplexe.

6.5 Exercices

Exercice 6.5.1

Déterminer le programme dual du problème ci-après.

$$\begin{cases} \min[\psi(v_1, v_2, v_3) = -v_1 + 2v_3] \\ v_1 + 3v_2 - 2v_3 \leq 1 \\ |v_1| \leq 5 \\ v_3 \geq 0 \text{ et } v_2 \text{ s. r. s.} \end{cases}$$

Exercice 6.5.2

Soit le programme linéaire $(\mathcal{P})$ ci-dessous.

$$\begin{cases} \max[Z(x) = -2x_1 - x_2] \\ 3x_1 + x_2 \quad = 3 \\ 4x_1 + 3x_2 \quad \geq 6 \\ x_1 + 2x_2 \quad \leq 3 \\ x = (x_1, x_2) \geq 0_{\mathbb{R}^2}. \end{cases}$$

1) *Résoudre ce problème par la méthode graphique.*

2) *Retrouver la solution par la méthode des deux phases.*

3) a - *Déterminer le problème dual $(\mathcal{D})$.*

b - *A partir de la base optimale du primal, déterminer une solution optimale de $(\mathcal{D})$.*

c - *Expliquer pourquoi $(\mathcal{D})$ admet une infinité de solutions optimales.*

d - *Utiliser le théorème des écarts complémentaires pour résoudre $(\mathcal{D})$.*

Exercice 6.5.3

On considère le (PL) de l'Exemple 11.

$$\begin{cases} \max[\psi(v) = 24v_1 + 17v_2 + 21v_3 + 18v_4] \\ 3v_1 + 2v_2 + v_3 - v_4 \geq 1 \\ v_1 + v_2 + 3v_3 + 3v_4 \geq 1 \\ v = (v_1, v_2, v_3, v_4) \geq 0_{\mathbb{R}^4}. \end{cases}$$

1) *Résoudre ce problème par l'algorithme dual-simplexe.*

2) a - *Donner le programme dual et le résoudre par l'algorithme du simplexe.*

b - *Comparer les tableaux de la première question et ceux de la question précédente.*

3) *Résoudre ce problème par la méthode de la base non réalisable. Que peut-on dire ?*

Exercice 6.5.4

Un producteur fabrique quatre produits P_1, P_2, P_3, P_4 à l'aide de trois matière premières M_1, M_2, M_3. Le tableau ci-dessous donne les quantités de matières premières intervenant dans la production de chacun des 4 produits, le rendement par unité du produit ainsi que les maxima de quantités de matières premières disponibles :

	P_1	P_2	P_3	P_4	Qté disponible
M_1	1	0	0	1	5
M_2	1	0	1	2	13
M_3	0	1	1	3	18
Rendement unitaire	4	2	4	14	

1) *Modéliser ce problème en un programme linéaire $(\mathcal{P})$.*

2) a - *Ecrire $(\mathcal{P})$ sous forme standard et montrer que la matrice B_0 relative aux coordonnées (y_1, y_6, y_2) est une base réalisable.*

b - *B_0 est-elle une base optimale ? Justifier votre réponse.*

3) *Résoudre le problème $(\mathcal{P})$ par la méthode du simplexe.*

4) *Ecrire le programme dual $(\mathcal{D})$ de $(\mathcal{P})$.*

5) *Résoudre le problème $(\mathcal{D})$ par trois méthodes différentes.*

Exercice 6.5.5

Utiliser le théorème des écarts complémentaires pour montrer que $(\frac{10}{17}, \frac{1}{17}, 0, 0, 0)$ *n'est pas une solution optimale du (PL) ci-dessous.*

$$\begin{cases} \max[Z(x) = 8x_1 - 9x_2 + 12x_3 + 4x_4 + 11x_5] \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 + x_4 + 3x_5 & \leq 1 \\ x_1 + 7x_2 + 3x_3 - 2x_4 + x_5 & \leq 1 \\ 5x_1 + 4x_2 - 6x_3 + 2x_4 + 3x_5 & \leq 22 \\ x = (x_1, \ldots, x_5) \geq 0_{\mathbb{R}^5}. \end{cases}$$

Exercice 6.5.6

Soit A une matrice carrée de taille p qui vérifie les relations suivantes :

$$a_{i,j} = -a_{j,p-i+1}, \ \forall i, j \in \{1, \ldots, p\}.$$

1) **a** - *Montrer que la ligne i de A est l'opposé de la colonne $(p-i+1)$.*

b - *Montrer que pour $p = 3$, toute matrice de ce type s'écrit sous la forme :*

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & -a_1 \\ -a_2 & 0 & -a_2 \\ -a_1 & a_2 & a_1 \end{pmatrix}, \text{ où } a_1,\ a_2 \in \mathbb{R}.$$

2) *Soit $b \in \mathbb{R}^p$ fixé. On considère la forme canonique ci-après.*

$$\begin{cases} \max[Z(x) = -b^* x] \\ Ax \leq b \\ x \geq 0_{\mathbb{R}^p}. \end{cases}$$

a - *Montrer que ce primal et son dual admettent tous deux le même domaine réalisable.*

3) *Soit*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } b = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Avec ces données, montrer que les contraintes du primal sont incompatibles. Que peut-on dire des contraintes du dual ?

Exercice 6.5.7 (Matrice de jeu)

Soit A une matrice (m, n). Deux personnes se mettent d'accord sur un jeu dont le principe est comme suit :

- *La première personne, appelée joueur ligne, choisit une ligne i selon une certaine probabilité x_i,*

- *la deuxième personne choisit, indépendamment de la première personne, une colonne j selon une certaine probabilité v_j. Par analogie, la deuxième personne s'appelle joueur colonne.*

Une fois le choix des deux joueurs effectué, le joueur ligne reçoit un montant de valeur a_{ij} du joueur colonne. Bien sûr, si $a_{ij} < 0$, cela veut dire que le joueur ligne donne $-a_{ij}$ à l'autre joueur. Dans les deux cas, on dira que le joueur ligne (resp. colonne) a gagné (resp. perdu) le montant a_{ij}.

1) a - *Montrer que, à chaque partie de jeu, le gain moyen du joueur ligne vaut*

$$x^* Av = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_i a_{ij} v_j,$$

où $x = (x_1, \ldots, x_m)$ et $v = (v_1, \ldots, v_n)$.

b - *En déduire la perte moyenne du joueur colonne.*

2) *Le joueur ligne fixe une stratégie de choix $x = (x_1, \ldots, x_m)$ avec $x_i \geq 0$ et $\sum x_i = 1$.*

a - *Montrer que le gain moyen minimal (par partie) du joueur ligne est la valeur optimale du (PL) suivant :*

$$(1) \begin{cases} \min[x^* Av] \\ \sum_{j=1}^{n} v_j = 1 \\ v \geq 0_{\mathbb{R}^n}. \end{cases}$$

b - *En utilisant la notion de combinaison convexe, montrer que*

$$\min_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^{m} x_i a_{ij} \text{ est la valeur optimale de (1).}$$

c - *Déterminer le programme dual de (1) et retrouver le résultat de la question précédente.*

3) *L'objectif du joueur ligne est de trouver une stratégie de jeu x de sorte que*

$$\begin{cases} \min[x^* Av] \\ \sum_{j=1}^{n} v_j = 1 \\ v \geq 0_{\mathbb{R}^n}. \end{cases} \quad \text{soit maximale.}$$

Montrer que ce problème se traduit par le (PL) suivant :

$$(I)\begin{cases} \max[Z(z,x) = z] \\ z - \displaystyle\sum_{i=1}^{m} x_i a_{ij} \quad \leq 0, \text{ pour } j = 1,\ldots,n \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{m} x_i \qquad\qquad = 1 \\ x = (x_1,\ldots,x_m) \geq 0_{R^m} \text{ et } z \in \mathbb{R} \text{ s. r. s.} \end{cases}$$

La stratégie optimale sera notée par x_{op}.

4) *Le joueur colonne est supposé en possession d'une stratégie de choix* $v = (v_1,\ldots,v_n)$.

a - *Montrer que la perte moyenne maximale du joueur colonne est la valeur optimale du (PL) suivant :*

$$(2)\begin{cases} \max[x^* A v] \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{m} x_i = 1 \\ x \geq 0_{\mathbb{R}^m}. \end{cases}$$

b - *Montrer que*

$$\max_{1\leq i\leq m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} v_j \text{ est la valeur optimale de (2).}$$

c - *Déterminer le programme dual de (2) et retrouver le résultat de la question précédente.*

5) *L'objectif du joueur colonne est de trouver une stratégie de jeu* v *qui rend minimale sa perte moyenne maximale. Montrer que ce problème se traduit par le (PL) suivant :*

$$(II)\begin{cases} \min[\psi(v,w) = w] \\ w - \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j \quad \geq 0, \text{ pour } i = 1,\ldots,m \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{m} v_j \qquad\qquad = 1 \\ v = (v_1,\ldots,v_n) \geq 0_{R^n} \text{ et } w \in \mathbb{R} \text{ s. r. s.} \end{cases}$$

La stratégie optimale sera notée par v_{op}.

6) *Montrer que (II) est le dual de (I).*

7) *Montrer que* $\min x^*_{op}A = \max Ay_{op}$ *et en déduire que :*

$$\min_{v\in S_n} x^*_{op}Av = \max_{x\in S_m} x^*Av_{op}, \text{ où } S_l = \{y \in R^l_+ \ / \ \sum_{i=1}^{l} y_i = 1\}.$$

8) *Que représente la valeur* $x^*_{op}Av_{op}$ *?*

9) **a** - *Déterminer* x_{op} *et* v_{op} *en prenant comme matrice de jeu*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ -3 & 4 & 1 & -1 \\ 4 & -5 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

b - *Pour cette matrice A, ajouter les variables d'écart aux contraintes d'inégalité du primal (I), puis exprimer la variable s. r. s. z en fonction des* x_i *et des variables d'écart.*

c - *Eliminer la variable z de la forme standard et appliquer l'algorithme du simplexe pour déterminer* x_{op}. *Retrouver alors la stratégie optimale* v_{op}.

Exercice 6.5.8 *Exemple où le primal possède une base optimale dégénérée et son dual admet une et une seule solution optimale.*
Soi la (FC) ci-après.

$$\begin{cases} \max[Z(x) = -3x_1] \\ -x_1 + x_2 \ \le 4 \\ 2x_1 - x_2 \ \le 2 \\ x_1 - x_2 \ \le 0 \\ x = (x_1, x_2) \ge 0_{\mathbb{R}^2}. \end{cases}$$

1) **a** - *Résoudre cette (FC) par la méthode graphique et donner toutes les solutions optimales.*

b - *Retrouver ces solutions optimales en appliquant l'algorithme du simplexe, et proposer une solution optimale dégénérée.*

2) *Déterminer le programme dual, puis le résoudre par la méthode des tableaux formels.*

3) *Dans le but de chercher toutes les solutions optimales du dual, on applique, sur le dernier tableau formel, la technique suivante :*

A chaque itération du simplexe, prendre $w_s = 0$.

a - *Remarquer que l'algorithme boucle en deux itération et que la solution optimale demeure inchangée.*

b - *Peut-on affirmer que la solution optimale du dual est unique ?*

4) *On considère maintenant une autre technique de pivotage que l'on exerce toujours sur le dernier tableau formel.*

- *Si w_N^* contient une composante nulle, choisir $w_s \neq 0$ de sorte que $\lambda = 0$,*

- *sinon, appliquer la règle du meilleur coût marginal.*

a - *Montrer que le problème de cyclage persiste et que l'on aboutisse à la même solution optimale.*

b - *En déduire que cette solution optimale du dual est unique.*

c - *Retrouver ce dernier résultat via la méthode graphique.*

Exercice 6.5.9

Montrer à partir des tableaux formels que si le primal admet une solution optimale dégénérée vérifiant $w_N^* < 0_N^*$, le programme dual admet une infinité de solutions optimales.

Exercice 6.5.10

On considère le (PL) suivant :

$$\begin{cases} \max[Z(x) = c^*x] \\ Ax \leq b \\ x_j \geq 0, \text{ pour } j = 1, \ldots, k \\ x_j \text{ s. r. s. pour } j = k+1, \ldots, p. \end{cases}$$

1) **a** - *En effectuant un changement de variable adéquat sur les variables s. r. s., écrire ce (PL) sous forme canonique.*

b - *A partir de cette forme canonique, montrer que le dual peut s'écrire comme suit :*

$$\begin{cases} \min[\psi(v) = b^*v] \\ \sum_{i=1}^{m} v_i a_{ij} \geq c_j, \text{ pour } j = 1, \ldots, k \\ \sum_{i=1}^{m} v_i a_{ij} = c_j, \text{ pour } j = k+1, \ldots, p \\ v = (v_1, \ldots, v_m) \geq 0_{\mathbb{R}^m}. \end{cases}$$

2) *On considère maintenant un (PL) sous forme standard :*

$$\begin{cases} \max[Z(y) = c^*y] \\ My = b \\ y \geq 0_{\mathbb{R}^n}. \end{cases}$$

a - *En remplaçant chaque égalité par une double inégalité, donner la forme canonique de ce problème.*

b - *A partir de cette forme canonique, montrer que le dual peut s'écrire comme suit :*

$$\begin{cases} \min[\psi(v) = b^* v] \\ M^* v \geq c \\ v \text{ s. r. s.} \end{cases}$$

Exercice 6.5.11

1) *Sans utiliser le théorème des écarts complémentaires, montrer que, pour un primal canonique (FCP), toute solution optimale x de (FCP) et v de son dual (FCD) vérifient :*

$$v^*(b - Ax) = 0 \text{ et } x^*(A^* v - c) = 0.$$

2) *En déduire que si x est une solution optimale de (FCP), alors toute solution optimale v de (FCD) satisfait :*

1. $v_i = 0$ *pour toute contrainte i du primal non saturée par x.*
2. $\sum_{i=1}^{m} v_i a_{ij} = c_j$ *pour tout indice j vérifiant $x_j > 0$.*

3) *Montrer que si de plus x est un sommet non dégénéré (i. e. il existe exactement p hyperplans frontières dont l'intersection est réduite à x), alors le système linéaire formé par les équations 1. et 2. est de Cramer.*

4) *Expliquer comment déterminer une solution x à partir d'une solution optimale v du dual. Dans quel cas le point x est-il unique ?*

5) *Sans utiliser le théorème des écarts complémentaires, montrer que, pour un primal standard (FSP), toute solution optimale y de (FSP) et v de son dual (FSD) vérifient :*

$$y^*(M^* v - c) = 0.$$

6) *En déduire que si y est une solution optimale de (FSP), alors toute solution optimale v de (FSD) satisfait :*

$$\sum_{i=1}^{m} v_i m_{ij} = c_j \text{ pour tout indice } j \text{ vérifiant } y_j > 0.$$

7) *Montrer que si y est une solution optimale non dégénérée, alors le système ci-dessus est de Cramer.*

Exercice 6.5.12

Considérons une forme canonique arbitraire.

$$\begin{cases} \max[Z(x) = c^* x] \\ Ax \leq b \\ x \geq 0_{\mathbb{R}^p}. \end{cases}$$

On suppose que ce programme admet une solution optimale x_{op}. La base optimale B relative à x_{op} est supposée non dégénérée. On change les composantes du second membre b de b_i en $b_i + t_i$.

1) *Montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que B reste optimale pour le problème modifié pourvu que $|t_i| \leq \varepsilon$ pour tout i.*

2) *Montrer que la valeur optimale du problème modifié vaut :*

$$Z(x_{op}) + \sum_{i=1}^{m} v_i t_i,$$

où $v = (v_1, \ldots, v_m)$ est la solution optimale du problème dual.

Chapitre 7

Problème de transport

Le problème de transport est un cas particulier de programmation linéaire. Il doit son nom à son objectif d'origine : prendre un plan d'acheminement à coût optimal pour des systèmes de distribution faisant intervenir des sources, des destinataires et des transporteurs. Le problème de transport a été étudié en premier lieu par F. L. Hitchcock [19] en 1941, bien avant l'apparition de la méthode du simplexe. Il s'est avéré par la suite que l'algorithme de transport est une mise en œuvre particulière de l'algorithme du simplexe. Mais en raison de la particularité du problème de transport, de nouvelles méthodes spécifiques ont été élaborées pour la recherche d'une base réalisable initiale. Par rapport au simplexe, l'algorithme de transport détient un autre avantage majeur qui se manifeste au niveau de l'allocation mémoire et le temps d'exécution sur machine.

7.1 Tableau de transport

Considérons m sources, par exemple des usines, devant approvisionner des destinataires, par exemple des points de vente, pour un produit fixé. Désignons par a_i la quantité de produit disponible à la source i et par b_j le besoin du destinataire j. On note c_{ij} le coût de transport unitaire entre la source i et la destination j. En général, c_{ij} dépend de la distance liant le fournisseur i au client j. On suppose naturellement que les coûts de transport c_{ij} sont proportionnels aux quantités livrées. Le problème consiste à déterminer la quantité y_{ij} de produit fournie au destinataire j en provenance de la source i afin de minimiser le coût total de transport. Bien sûr, il faut impérativement subvenir aux besoins de

tous les destinataires à partir des quantités disponibles dans les sources.
Ce problème de minimisation se traduit par le (PL) suivant :

$$\begin{cases} \min[\psi(y) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}y_{ij}] \\ \sum_{j=1}^{n} y_{ij} = a_i, \text{ pour } i = 1, \ldots, m \\ \sum_{i=1}^{m} y_{ij} = b_j, \text{ pour } j = 1, \ldots, n \\ y = (y_{ij}, i = 1, \ldots, m \; ; \; j = 1, \ldots, n) \geq 0_{\mathbb{R}^{nm}}. \end{cases}$$

Les contraintes $\sum_j y_{ij} = a_i$ traduisent le fait que la marchandise de chaque source i doit être entièrement transportée pour être répartie entre les différents clients. Par contre, les contraintes $\sum_i y_{ij} = b_j$ signifient que la quantité livrée au destinataire j, depuis les sources disponibles, est égale à son besoin b_j. Pour que le domaine réalisable soit non vide, il est impératif que la production soit adaptée à la demande :

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j. \tag{7.1}$$

Dans le cas où l'offre est strictement supérieure à la demande (*i. e.* $\sum a_i > \sum b_j$), on introduit un destinataire fictif afin d'absorber l'excédent $\sum a_i - \sum b_j$. Bien évidemment, les coûts de transport unitaires vers ce destinataire fictif doivent être nuls. Sans perte de généralité, on suppose désormais que la condition (7.1) est satisfaite. On suppose aussi que $m \geq 2$ et $n \geq 2$, sinon le problème de transport devient trivial.

Il est facile de constater que le problème de transport est un (PL) écrit sous forme standard, pour lequel l'algorithme du simplexe peut être appliqué. Compte tenu de la structure particulère de la matrice M régissant les contraintes (qui est formée par des 0 et des 1) un algorithme particulier plus performant au niveau de l'exécution a été développé. Ce nouvel algorithme est une mise en pratique habile et adéquate de la méthode du simplexe.

Dans ce chapitre, les symboles m et n désignent respectivement le nombre de sources et le nombre de destinataires. Il s'agit des mêmes notations utilisées antérieurement pour représenter le nombre de

contraintes et le nombre de variables pour une forme standard générale. Dans le cas d'un problème de transport, on dispose de nm variables de décision et de $n+m$ contraintes d'égalités. Nous allons voir par la suite que le rang de la matrice M est $n+m-1$. Ainsi, pour un problème de transport, le nombre de coefficients figurant dans un tableau simplexe est égal à :

$$[(n+m-1)+1][nm-(n+m-1)+1] = (n+m)[(n-1)(m-1)+1]$$

Ce nombre est énorme comparé au nombre nm de variables. Grâce à la structure particulière du problème de transport, on envisage de définir un tableau, appelé **tableau de transport**, qui contient seulement les composantes de $B^{-1}b$ et celles du vecteur w_N^*. Il est utile de rappeler à cet égard que la taille du vecteur $B^{-1}b$ additionnée à la taille de w_N^* coïncide parfaitement avec le nombre de variables structurelles. Ajoutés à ces nm éléments, on introduit une colonne pour les quantités disponibles a_i et une ligne pour les quantités requises b_j. Les m premières lignes du tableau de transport s'appellent **lignes sources**. De manière analogique, les n premières colonnes s'appellent **colonnes destinataires**. Chaque case (i, j) du tableau ; $1 \leq i \leq m$ et $1 \leq j \leq n$; sera remplie exclusivement par un élément de base réalisable ou une composante du vecteur des coûts réduits. Afin de distinguer ces deux éléments, on convient d'encercler les éléments de base. Pour chaque couple source-destination (i, j), le coût unitaire de transport c_{ij} occupe le coin supérieur gauche de la case appropriée.

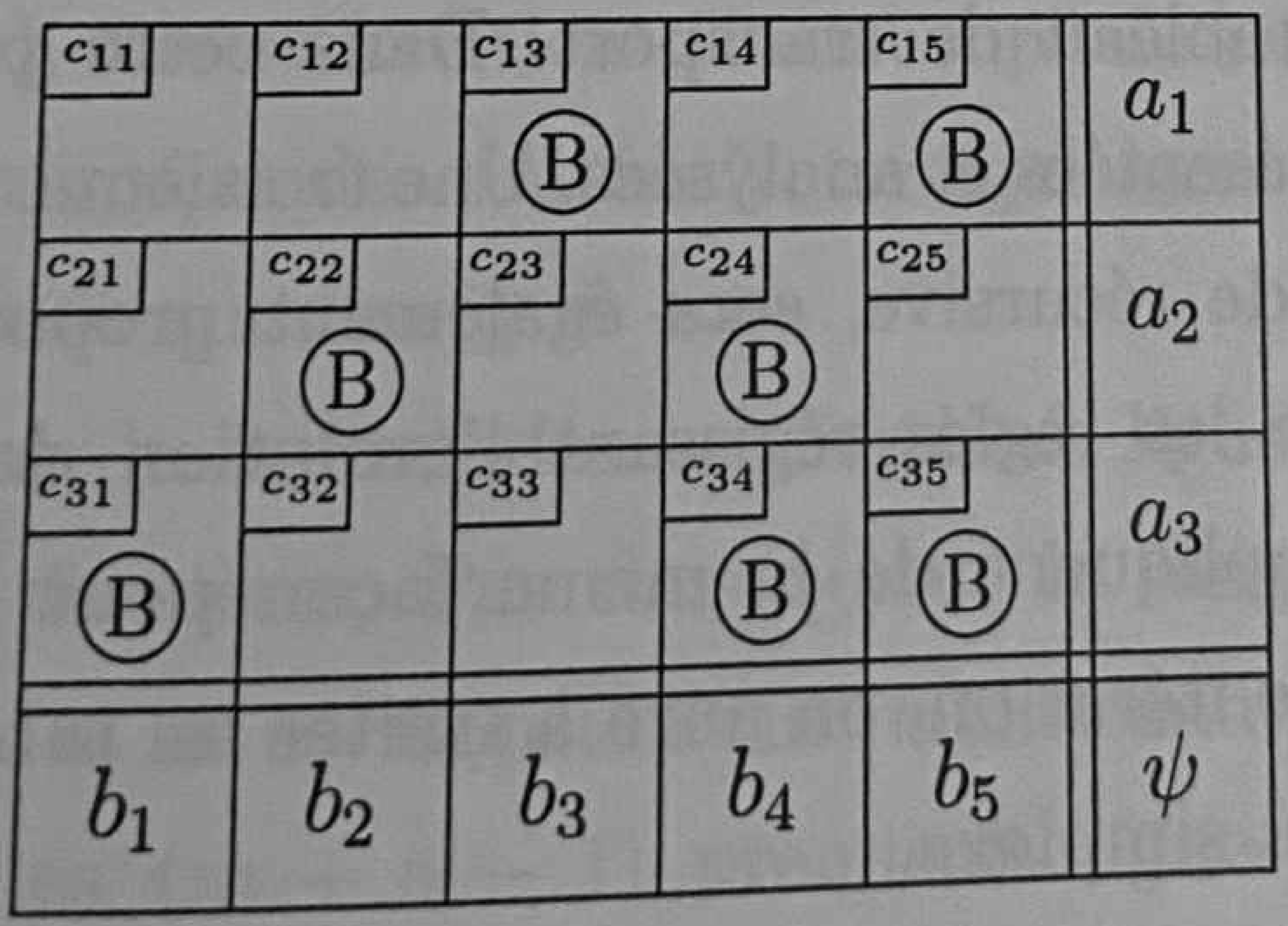


FIG. 7.1 – Tableau de transport pour $m = 3$ et $n = 5$

Dans le tableau de la Figure 7.1, chaque case (i, j) contenant l'élément encerclé Ⓑ correspond à une composante $(B^{-1}b)_l$ d'une certaine base

réalisable B. Cette composante sera naturellement notée par y_{ij}^B. Quant aux cases vides, elles s'associent aux variables hors base y_{ij}^N. Par définition, la solution de base réalisable relative à B vérifie $y_{ij}^N = 0$ pour toute case (i, j) hors base. Au lieu de mettre des zéros, on remplit les cases vides par les éléments du vecteur des coûts réduits w_N^*. Comme d'habitude, on note par J_B l'ensemble des indices ij de toutes les cases (i, j) contenant un élément de type Ⓑ. Pour que le système de base $\{y_{ij}^B,\ ij \in J_B\}$ soit réalisable, il faut et il suffit que :

1. pour chaque ligne i, la somme des éléments y_{ij}^B (relatifs aux cases de type Ⓑ) soit égale à a_i,
2. la somme des éléments y_{ij}^B, selon une colonne j, soit égale à b_j,
3. et $y_{ij}^B \geq 0$, pour tout $ij \in J_B$.

Les points 1. et 2. justifient la présence des termes a_i et b_j dans le tableau de transport. La case en bas à droite du tableau de transport de la Figure 7.1 contient la valeur de la fonction d'objectif ψ appliquée à la solution de base réalisable relative à B. D'après l'indexation définie précédemment, cette valeur vaut exactement

$$\psi = \sum_{ij \in J_B} c_{ij} y_{ij}^B.$$

La différence avec le tableau simplexe c'est que le tableau de transport ne contient pas la matrice $B^{-1}N$. Tout de même, nous verrons comment calculer le vecteur des coût réduits w_N^* directement à partir des éléments figurants dans le tableau de transport. Dans cette perspective, deux méthodes seront présentées et analysées. Une troisième, que l'on convient de nommer méthode récursive, sera également proposée. Par ailleurs, en ce qui concerne les règles régissant l'évolution de l'algorithme du simplexe, elles s'appliquent de la même façon pour les problèmes de transport. A chaque itération, on aura à traiter un tableau de transport au lieu d'un tableau simplexe.

7.2 Initialisation

La structure même du problème de transport permet, sans recours à la phase I de l'algorithme du simplexe, de trouver une solution de base

réalisable initiale. Pour chercher une base, il va falloir déterminer au préalable le rang de la matrice M qui régit les contraintes du problème de transport.

Théorème 7.2.1 *Le rang de la matrice M est égal à $m+n-1$.*

Démonstration. Tout d'abord, on ordonne les composantes de la variable y et le second membre b des contraintes comme suit :

$$y = \begin{pmatrix} y_{11} \\ \vdots \\ y_{1n} \\ y_{21} \\ \vdots \\ y_{2n} \\ \vdots \\ y_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{et } b = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \\ b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Ainsi, les contraintes d'égalité $\sum_j y_{ij} = a_i$ et $\sum_i y_{ij} = b_j$ se traduisent matriciellement par $My = b$ où

$$M = \begin{bmatrix} \mathbf{1}_n^* & \mathbf{0}_n^* & \dots & \mathbf{0}_n^* \\ \mathbf{0}_n^* & \mathbf{1}_n^* & \dots & \mathbf{0}_n^* \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0}_n^* & \mathbf{0}_n^* & \dots & \mathbf{1}_n^* \\ I_n & I_n & \dots & I_n \end{bmatrix}.$$

Ici, $\mathbf{1}_n^*$ est un vecteur ligne de taille n avec des composantes toutes égales à 1. De même, $\mathbf{0}_n^*$ est le vecteur ligne nul de $\mathbb{R}^n$. Quant à I_n, elle représente la matrice identité d'ordre n. La matrice M est donc d'ordre $(m+n, mn)$, creuse (contient "beaucoup" de zéros) et constituée seulement par des zéros et des unités. Noter également que la condition $m \geq 2$ et $n \geq 2$ assure que $nm \geq m+n$.

On remarque que la somme des m premières lignes de M est égale à la somme des n dernières. Par conséquent, le rang de M est strictement inférieur à $m+n$. Considérons maintenant la sous-matrice de M formée par les $(m+n-1)$ premières lignes et des colonnes $n, 2n, \dots, nm, 1, 2, \dots, n-1$. Cette sous-matrice est égale à :

$$\begin{bmatrix} I_m & S \\ 0_{n-1,m} & I_{n-1} \end{bmatrix}, \text{ avec } S = \begin{pmatrix} \mathbf{1}_{n-1}^* \\ \mathbf{0}_{n-1}^* \\ \vdots \\ \mathbf{0}_{n-1}^* \end{pmatrix} : \text{matrice } (m, n-1).$$

Il est aisé de constater que cette sous-matrice est d'ordre $(m+n-1)$ et de déterminant égal à 1. Alors, on conclut que le rang de M vaut exactement $(m+n-1)$. □

Au cours de la démonstration de ce théorème, on avait constaté que la somme des m premières lignes de M était égale à la somme des n dernières. Grâce à la condition d'équilibre (7.1), cette propriété est satisfaite aussi pour le second membre b. Par suite, le système linéaire $My = b$ est compatible, il contient donc une équation redondante (qui est une combinaison linéaire de toutes les autres) que l'on peut supprimer. D'ailleurs, on peut supprimer n'importe quelle équation puisque chacune s'exprime comme combinaison linéaire de toutes les autres.

Théorème 7.2.2 *Si les valeurs des disponibilités a_i et des besoins b_j sont entières, toute solution de base est entière.*

Démonstration. Toute solution de base $B^{-1}b$ est la solution du système linéaire $By^B = b$. En raison de la structure de la matrice M, toute base B est formée uniquement par des 0 et des 1 ; de plus, par un rangement adéquat des colonnes de B, celle-ci peut acquérir une forme triangulaire. Donc, la résolution du système $By^B = b$ ne fait intervenir que les opérations d'addition et/ou de soustraction. Aucune opération de division n'est exigée. Ceci prouve bien le résultat demandé. □

On vérifie facilement que le point $y \in \mathbb{R}^{nm}$ défini par

$$y_{ij} = \frac{a_i b_j}{\sum_{i=1}^{m} a_i} = \frac{a_i b_j}{\sum_{j=1}^{n} b_j}$$

est une solution réalisable. En aucun cas, ce point ne peut être une solution de base étant donné que $y_{ij} \neq 0$ pour tout i et pour tout j. Pour un problème de transport, les méthodes de recherche d'une solution de base réalisable s'appuient toutes sur un même principe. Ce principe général peut être résumé de la façon suivante :

Supposons qu'on ait sélectionné une case (i, j), c'est à dire une source i et un destinataire j. Les opérations que l'on effectue afin d'attribuer une valeur à la variable de base y_{ij}^B sont :
- approvisionner le destinataire j de la quantité

$$y_{ij}^B = \min\{a_i, b_j\}.$$

- Si $a_i < b_j$, la source i est satisfaite (son stock est liquidé). Dans ce cas, on met à jour la destination j :

$$b_j \leftarrow b_j - y_{ij}^B.$$

- Si $a_i > b_j$, le destinataire j est satisfait (il est entièrement approvisionné). Dans ce cas, on met à jour la source i :

$$a_i \leftarrow a_i - y_{ij}^B.$$

A chaque affectation, on est certain que la valeur y_{ij}^B est entière positive au cas où les a_i et les b_j le sont. Le principe décrit ci-dessus est donc en parfaite cohérence avec le théorème précédent.

7.2.1 Règle du coin Nord-Ouest

Cette méthode choisit les cases de base réalisable à partir du coin supérieur en allant de gauche à droite jusqu'au moment où la ligne-source en cours est satisfaite. On passe ensuite à la ligne suivante et on applique le même raisonnement jusqu'à la liquidation de cette ligne-source. A chaque fois qu'une case est sélectionnée, on applique les opérations du principe général. La méthode s'arrête lorsque la case située dans le coin inférieur droit est attribuée. Pour cette règle appelée "règle du coin Nord-Ouest", on retrouve une solution réalisable qui à chaque affectation de marchandise satisfait une des contraintes "source" ou "destination". A la dernière affectation et grâce à la condition (7.1), une source et une destination sont satisfaites en même temps. Par conséquent, cette solution contient exactement $(m + n - 1)$ valeurs y_{ij}^B encerclées, elle constitue une solution de base réalisable.

Exemple 31 Une entreprise dispose de 3 laboratoires dans lesquels elle fabrique son produit et de 5 centres dans lesquels elle ravitaille sa clientèle.

Le tarif de transport est fixé à 2DT la tonne par kilomètre parcouru. Le tableau suivant indique les distances entre les laboratoires L_i et les centres C_j. Ce tableau donne aussi les quantités (en tonnes) a_i disponibles dans les laboratoires et celles requises (notées b_j) dans les centres de distribution.

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	a_i
L_1	100	80	50	70	40	70
L_2	80	60	90	40	30	70
L_3	100	40	50	80	20	80
b_j	40	70	60	30	20	

Le but de l'entreprise est de chercher un plan d'acheminement à coût minimal des laboratoires aux centres de distribution.

Ce problème de transport est équilibré puisque la production est adaptée à la demande ($\sum a_i = \sum b_j = 220$). Pour chaque couple (L_i, C_j), on considère la variable y_{ij} définie par la quantité transportée, en tonnes, depuis L_i vers le centre C_j. Etant donné que le tarif d'une tonne transportée est de 2DT par kilomètre parcouru, le coût unitaire de transport c_{ij} est égal à la distance séparant L_i à C_j multipliée par 2. Afin d'alléger l'écriture des coûts unitaires de transport, on choisit 20 comme unité de mesure (*i.e.* $c_{ij} \leftarrow c_{ij}/20$). La formulation de la recherche d'un plan d'acheminement optimal se traduit par la résolution du (PL) suivant :

$$\begin{cases} \min[\psi(y) = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{5} c_{ij}y_{ij}] \\ \sum_{j=1}^{5} y_{ij} = a_i, \quad \text{pour } i = 1,2,3 \\ \sum_{i=1}^{3} y_{ij} = b_j, \quad \text{pour } j = 1,\dots,5 \\ y_{ij} \geq 0, \ \forall i,j. \end{cases}$$

Les données de ce (PL) peuvent être récapitulées dans le tableau de transport ci-après.

Pour chercher une solution de base réalisable par la méthode du coin Nord-Ouest, on commence par la case $(1,1)$ dans laquelle on reporte la valeur $40 = \min\{40, 70\}$, puis on met à jour la première source : $a_1 \leftarrow 70 - 40 = 30$. Ainsi, le centre de distribution C_1 est satisfait, on

10	8	5	7	4	70
8	6	9	4	3	70
10	4	5	8	2	80
40	70	60	30	20	

FIG. 7.2 – Tableau de transport relatif à l'Exemple 31

passe donc à la case $(1, 2)$ où on reporte la valeur $30 = \min\{30, 70\}$. De cette façon, la source L_1 est satisfaite, ce qui nous oblige à passer à la ligne L_2 après avoir mis à jour le centre C_2 : $b_2 \leftarrow 70 - 30 = 40$. Cette même procédure est appliquée jusqu'à la dernière case $(3, 5)$ pour laquelle la valeur 20 doit être attribuée. La solution de base réalisable obtenue est reportée dans la Figure 7.3. On constate que le nombre de variables de base est adéquat, égal à $7 = 3 + 5 - 1$. La valeur de la fonction d'objectif pour cette solution réalisable vaut $\psi = 1580$. En raison de l'unité de mesure choisie, il faut multiplier cette valeur par 20 pour obtenir le coût de transport relatif à cet acheminement.

10 (40)	8 (30)	5	7	4	70
8	6 (40)	9 (30)	4	3	70
10	4	5 (30)	8 (30)	2 (20)	80
40	70	60	30	20	1580

FIG. 7.3 – Base initiale par la règle du coin Nord-Ouest

Il arrive que pendant une affectation d'une case (i, j), différente de (m, n), la source i et la destination j soient toutes les deux satisfaites (*i. e.* $a_i = b_j$ avec a_i et b_j les quantités mises à jour). Dans cette situation, il faut absolument attribuer la valeur 0 à la case adjacente $(i, j+1)$ ou $(i+1, j)$ ayant le coût unitaire minimal. Si les deux cases adjacentes possèdent des coût unitaires identiques, on choisit au hasard entre les deux cases. A défaut de cette opération, le nombre d'éléments encerclés

sera strictement inférieur à $m+n-1$, ce qui ne correspond guère à une solution de base. L'existence d'un zéro dans une coordonnée de base signifie que la solution de base correspondante est dégénérée. Afin d'illustrer cette dégénérescence, choisissons $b_2 = 30$ et $b_3 = 100$ à la place de $b_2 = 70$ et $b_3 = 60$. Dans ce cas, la solution de base réalisable devient comme indiqué dans la Figure 7.4.

10 (40)	8 (30)	5 (0)	7	4	70
8	6	9 (70)	4	3	70
10	4	5 (30)	8 (30)	2 (20)	80
40	30	100	30	20	1650

FIG. 7.4 – Cas dégénéré pour la méthode du coin Nord-Ouest

Nous verrons dans le paragraphe 7.3 de quelle façon calculer le vecteur des coûts réduits afin de juger l'optimalité ou la non optimalité de la solution de base retenue. Nous analyserons également la mise en œuvre de l'algorithme du simplexe pour passer d'un tableau de transport non optimal à un autre tableau ayant une meilleure valeur d'objectif. Aussitôt, on pourra donner la solution du problème de l'Exemple 31.

7.2.2 Méthode de plus faible coût

La méthode du coin Nord-Ouest est facile à implémenter, néanmoins elle choisit les cases de base (i,j) indépendamment des coûts unitaires c_{ij}. Si les coûts unitaires des cases retenues sont élevés par rapport aux cases restantes, la valeur d'objectif sera "éloignée" de sa valeur minimale. Cela entraîne sans doute un "grand" nombre d'itérations lors de la résolution par l'algorithme du simplexe. Une autre alternative consiste donc à sélectionner, au fur et à mesure, la case non remplie de coût unitaire minimal et d'en appliquer le principe général. S'il existe plusieurs cases ayant un coût unitaire minimal sur une même ligne ou une même colonne, on retient celle pour laquelle on peut attribuer la valeur y_{ij}^B maximale. Le choix aléatoire s'impose dans la mesure où les cases

vérifiant toutes ces conditions sont multiples. On arrête cette procédure lorsque les sources et les destinataires sont tous satisfaits. Pour illustrer cette méthode, la Figure 7.5 propose une solution de base réalisable initiale pour l'Exemple 31.

[10] (10)	[8]	[5] (60)	[7]	[4]	70
[8] (30)	[6] (10)	[9]	[4] (30)	[3]	70
[10]	[4] (60)	[5]	[8]	[2] (20)	80
40	70	60	30	20	1100

FIG. 7.5 – Base initiale par la méthode de plus faible coût

On commence à choisir la case $(3,5)$ qui possède le coût minimal $c_{35} = 2$. On y attribue la valeur $20 = \min\{20, 80\}$ et on met à jour la source L_3 : $a_3 \leftarrow 80 - 20 = 60$. Le coût minimal supérieur à $c_{35} = 2$ est $c_{25} = 3$. Mais cette case correspond à une colonne déjà satisfaite, elle n'est donc pas retenue. Alors, on passe au coût unitaire minimal et supérieur à $c_{25} = 3$ qui est 4. De proche en proche, on aboutit à la solution réalisable décrite dans la Figure 7.5. Noter que cette solution possède une valeur d'objectif qui est nettement plus petite que celle proposée par la règle du coin Nord-Ouest. Malheureusement, nous verrons que cette solution réalisable n'est pas optimale.

Il se peut qu'au cours d'une attribution d'une case (i, j) intermédiaire, la source i et le destinataire j soient tous les deux comblés. Dans ce cas, on attribue la valeur 0 à la case ayant le plus faible coût parmi les cases restantes de la colonne C_j et la ligne L_i. Ainsi, on obtient une solution de base dégénérée. Supposons par exemple que b_2 et b_3 deviennent respectivement $b_2 = 60$ et $b_3 = 70$ au lieu de 70 et 60. La méthode de plus faible coût conduit à une solution dégénérée comme le montre la Figure 7.6.

7.2.3 Méthode des pénalités

La méthode de plus faible coût propose de traiter la case de coût unitaire minimal, non encore satisfaite, sans tenir compte de l'impact

10	8	5 (70)	7	4	70
8 (40)	6	9 (0)	4 (30)	3	70
10	4 (60)	5 (0)	8	2 (20)	80
40	60	70	30	20	1070

FIG. 7.6 – Cas dégénéré pour la méthode de plus faible coût

de cette affectation sur les décisions futures. En effet, si le coût de la dernière case affectée est trop élevé, cette case ne sera pas retenue par une solution optimale. Supposons, par exemple, que le coût de la dernière case affectée soit $c_{11} = 30$ au lieu de $c_{11} = 10$, le coût d'acheminement pour la solution de base trouvée serait égal à 1300 qui est supérieur au coût précédemment calculé à savoir 1100 (voir Figure 7.5). On aimerait signaler que la méthode de plus faible coût doit obligatoirement retenir, à la dernière affectation, la case $(1, 1)$ comme coordonnée de base. La méthode des pénalités, que l'on doit à Reinfeld et Vogel [25], fournit généralement une solution de base réalisable initiale ayant un plus petit coût de transport que celle donnée par la méthode de plus faible coût. Elle s'appuie sur le principe suivant :

1. A chaque rangée (ligne ou colonne), calculer la différence absolue entre les deux coûts unitaires minimaux apparaissant sur cette rangée. Cette différence s'appelle **pénalité**, elle mesure l'augmentation minimale du coût de transport d'une unité de marchandise si celle-ci n'emprunte pas la route minimale sur cette rangée. Si la rangée est une ligne (*resp.* colonne), on parle de **pénalité-ligne** (*resp.* **pénalité-colonne**).
2. Parmi les pénalités-lignes et les pénalités-colonnes, retenir celle qui possède la plus grande valeur. S'il y en a plusieurs, prendre la rangée qui possède le coût minimal. Si on en trouve encore plusieurs, on choisit la case (i, j) à laquelle on peut attribuer le nombre y_{ij}^B maximal. S'il en reste plus d'une, on choisit au hasard parmi les cases candidates restantes.
3. Sur la rangée retenue, choisir la case ayant le coût unitaire minimal

et appliquer le principe général défini au début du paragraphe 7.2.

4. Eliminer du tableau la rangée qui a été comblée au cours de l'étape 3.

5. Retourner à l'étape 1.

A titre d'illustration, prenons l'Exemple 31 mais avec $c_{11} = 30$ au lieu de $c_{11} = 10$. Nous allons remarquer à la fin que la méthode des pénalités aboutit à une solution de base réalisable dont la valeur d'objectif est inférieure à celle proposée par la méthode de plus faible coût.

Phase I

30	8	5	7	4	70	1
8	6	9	4 (30)	3	70	1
10	4	5	8	2	80	2
40	70	60	30	20		
2	2	0	3	1		

Les nombres qui figurent à droite et en bas du tableau correspondent respectivement aux pénalités-lignes et pénalités-colonnes. La pénalité maximale est 3, elle correspond à la colonne C_4. On y choisit la case de plus faible coût unitaire, qui est $(2, 4)$, et on applique le principe général. Ainsi, la colonne C_4 est satisfaite, elle sera donc éliminée dans la deuxième phase. On refait la même procédure dans la deuxième phase et ainsi de suite jusqu'à ce que tous les destinataires soient comblés. L'application de la méthode des pénalités donne, à partir de la deuxième phase, les tableaux suivants :

Phase II

30	8	5	4	70	1
8	6	9	3 (20)	40	3
10	4	5	2	80	2
40	70	60	20		
2	2	0	1		

Phase III

30	8	5 (60)	70	3
8	6	9	20	2
10	4	5	80	1
40	70	60		
2	2	0		

Phase IV

30	8 (10)	10	12
8	6	20	2
10	4	80	6
40	70		
2	2		

Phase V

8	6	20	2
10	4 (60)	80	6
40	60		
2	2		

Phase VI

8 (20)	20
10 (20)	20
40	

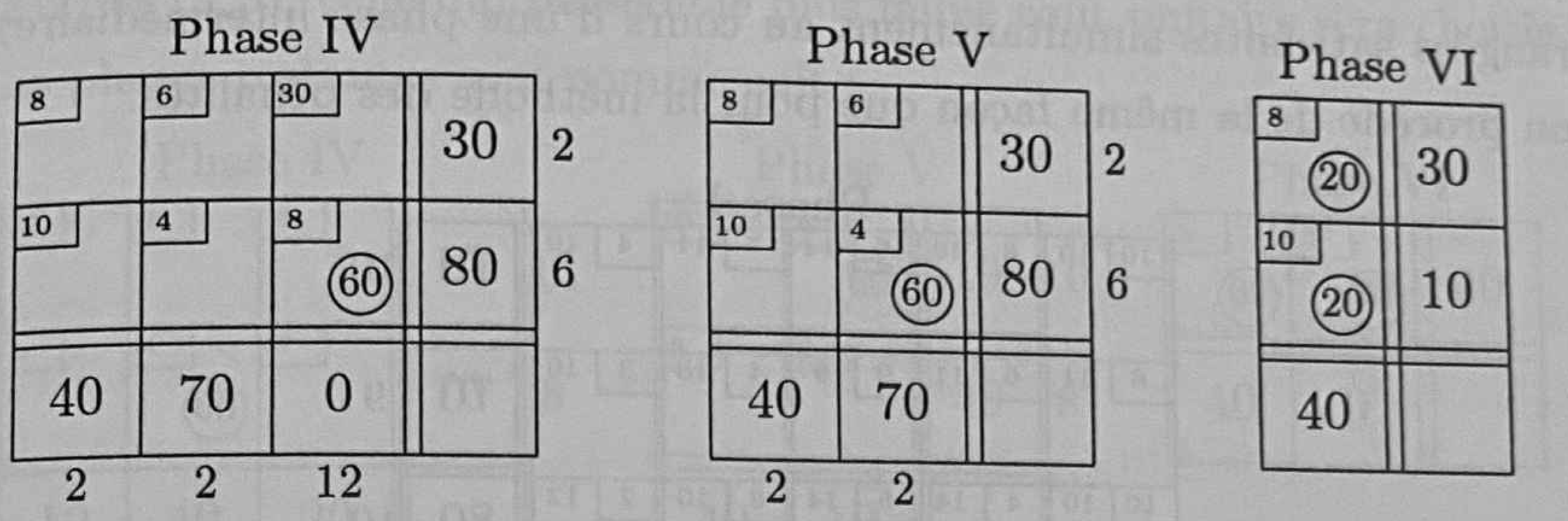
Pour la dernière phase, le calcul des pénalités est d'aucune utilité puisque, de toute manière, la marchandise doit être affectée au destinataire restant. La récapitulation de toutes ces phases aboutit à la solution de base réalisable de la Figure 7.7.

30	8 (10)	5 (60)	7	4	70
8 (20)	6	9	4 (30)	3 (20)	70
10 (20)	4 (60)	5	8	2	80
40	70	60	30	20	1160

FIG. 7.7 – Base initiale par la méthode des pénalités

Noter que la fonction d'objectif vaut cette fois-ci 1160, tandis que la méthode de plus faible coût a fourni la valeur 1300. En ce qui concerne la dégénérescence de la méthode des pénalités, elle se manifeste lorsqu'une pénalité-ligne et une autre pénalité-colonne sont simultanément satisfaites. Afin de conserver le nombre $(m + n - 1)$ de variables de base, il faut éliminer l'une d'entre elles et non les deux rangées à la fois. Il convient de retenir la pénalité ayant le coût unitaire minimal. Afin de visualiser la dégénérescence, nous allons modifier les quantités a_1 et a_2 pour devenir respectivement 60 et 80 au lieu de 70 et 70. Les trois premières phases restent identiques mais il faut tenir compte des nouvelles disponibilités. On aura alors $a_1 = 60$ et $a_2 = 30$ au niveau de la phase III à la place de $a_1 = 70$ et $a_2 = 20$ (voir schéma précédent). A ce stade, la pénalité-ligne L_1 et la pénalité-colonne C_3 sont simultanément satisfaites. On retient C_3 parce qu'elle contient le plus faible

coût unitaire parmi les cases de L_1 et de C_3. Ainsi, la pénalité-ligne L_1 sera éliminée. A partir de la phase III, l'évolution de la méthode des pénalités se fait comme suit :



De cette façon, la méthode des pénalités aboutit à une solution de base réalisable, qui est dégénérée, comme on peut l'observer dans la Figure 7.8.

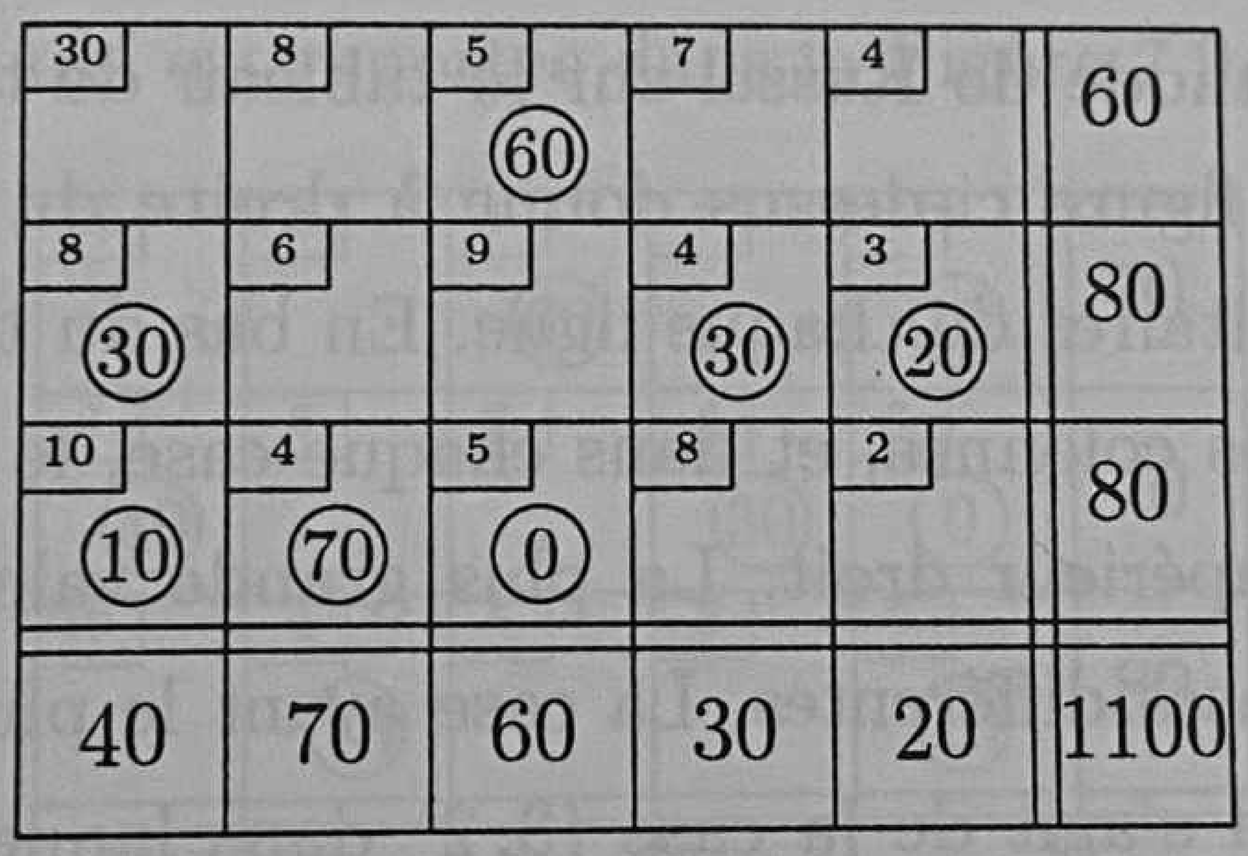


FIG. 7.8 – Cas dégénéré pour la méthode des pénalités

7.2.4 Méthode de Russel

Cette méthode fut proposée par Russel [27] en 1969 pour tenter de trouver une base réalisable proche d'une base optimale. Elle s'articule sur un principe similaire à celui de la méthode des pénalités. Au lieu des pénalités lignes et colonnes, on calcule sur chaque case (i, j) la quantité

$$\gamma_{ij} = \bar{u}_i + \bar{v}_j - c_{ij}, \text{ où } \bar{u}_i = \max_{1 \leq j \leq n} c_{ij} \text{ et } \bar{v}_j = \max_{1 \leq i \leq m} c_{ij}.$$

Ensuite, la case qui détient la plus grande valeur γ_{ij} est retenue. S'il y en a plusieurs, on prend la case ayant le coût minimal. S'il en reste plusieurs, la case pour laquelle on peut affecter le nombre y_{ij}^B maximal est retenue. S'il en reste encore plus d'une, le choix aléatoire s'impose.

On applique alors le principe général sur cette case, puis on élimine la rangée qui a été comblée. Cette procédure sera itérée jusqu'à ce que toute la marchandise soit livrée à destination. En cas de dégénérescence (deux rangées satisfaites simultanément au cours d'une phase intermédiaire), on procède de la même façon que pour la méthode des pénalités.

Phase I

10 10	8 10	5 14	7 11	4 10	70	10
8 11	6 11	9 9	4 13	3 10	70	9
10 10	4 14 (70)	5 14	8 10	2 12	80	10
40	70	60	30	20		
10	8	9	8	4		

Appliquons la méthode de Russel sur le tableau de transport relatif à l'Exemple 31. La figure ci-dessus donne à droite du tableau le maximum des coûts unitaires de chaque ligne. En bas du tableau, on trouve le maximum sur les colonnes, et dans chaque case, le coefficient γ_{ij} est reporté au coin supérieur droit. La plus grande valeur 14 des γ_{ij} est atteinte en trois cases différentes. La case ayant le plus faible coût unitaire est retenue, il s'agit de la case $(3, 2)$ dans laquelle on attribue la valeur $70 = \min\{80, 70\}$. La colonne C_2 est ainsi satisfaite, elle est donc éliminée.

Phase II

10 10	5 14 (60)	7 11	4 10	70	10
8 11	9 9	4 13	3 10	70	9
10 10	5 14	8 10	2 12	10	10
40	60	30	20		
10	9	8	4		

Phase III

10 10	7 11	4 10	10	10
8 10	4 12	3 9	70	8
10 10	8 10	2 12 (10)	10	10
40	30	20		
10	8	4		

A la phase II, deux cases, ayant le même coût unitaire, contiennent la valeur maximale 14 des γ_{ij}. Dans ce cas, on choisit celle dans laquelle la plus grande valeur y_{ij}^B puisse être attribuée. Il s'agit de la case $(1, 2)$

pour laquelle on affecte la valeur $60 = \min\{60, 70\}$. Noter que pour la case $(3, 2)$, qui vérifie aussi $\gamma_{32} = 14$, on ne peut affecter que la quantité $10 = \min\{10, 60\}$. En ce qui concerne la Phase III, entre les deux cases $(2, 2)$ et $(3, 3)$, celle qui possède le plus faible coût unitaire sera choisie. Les phases restantes sont comme suit :

Phase IV

10	7	4	10	10
8	4 (60)	3	70	8
10	40	20		
10	7	4		

Phase V

10	4 (60)	10	10
8	3	40	8
40	10		
10	4		

Phase VI

8 (60)	3 (60)	40
40	0	

A la dernière phase, il est inutile de calculer les coefficients γ_{ij}. La récapitulation des résultats de toutes ces phases aboutit à la solution de base réalisable qui est reportée dans la Figure 7.9.

10	8	5 (60)	7	4 (10)	70
8 (40)	6	9	4 (30)	3 (0)	70
10	4 (70)	5	8	2 (10)	80
40	70	60	30	20	1080

FIG. 7.9 – Base initiale par la méthode de Russel

Nous verrons que la solution initiale proposée par la méthode de Russel est optimale. Pour $c_{11} = 30$ à la place de $c_{11} = 10$, on trouve aussi une valeur d'objectif égale à 1100 alors que la méthode de pénalité a fournit la valeur 1160. On laisse au lecteur le soin de vérifier cette dernière affirmation. En conclusion, les deux dernières méthodes exigent plus de calculs que les deux premières. Cependant, cet effort supplémentaire est récompensé, puisque d'une façon générale les méthodes des pénalités et de Russel proposent une meilleure solution de base initiale. Par ailleurs, la méthode de Russel fournit en moyenne une meilleure solution initiale, plus proche de la valeur optimale, que celle fournie par la méthode des pénalités [8].

7.3 Calcul des coûts réduits

Une fois la solution de base initiale identifiée à l'aide de l'une des quatre méthodes précédentes, il est souhaitable de contrôler son optimalité. Mathématiquement parlant, cela revient à tester la véracité de la condition "$w_N^* \leq 0_N^*$". S'agissant d'un problème de type minimisation, le vecteur des coûts réduits vaut $w_N^* = c_B^* B^{-1} N - c_N^*$. Par opposition au tableau simplexe, le tableau de transport ne comporte pas la matrice $B^{-1}N$. Toutefois, la structure même du problème de transport nous permettra de calculer les coûts réduits directement à partir des éléments figurants dans le tableau de transport.

7.3.1 Méthode des cycles de changement

Propriétés liées à la matrice du pivot

On a déjà établi que le système linéaire $My = b$, possédant $m + n$ équations et nm variables, est de rang $(m+n-1)$ et qu'il est compatible. Une base est donc une matrice carrée extraite de M, d'ordre $(m+n-1)$ et inversible.

Lemme 7.3.1 *Toute matrice carrée extraite de M a un déterminant égal à 0 ou ± 1.*

Démonstration. Soit T_k une matrice carrée d'ordre k extraite de M. Compte tenu de l'expression de M, chaque colonne de T_k possède :

(i) soit k zéros,

(ii) soit $(k-1)$ zéros et 1 coefficient unitaire,

(iii) soit $(k-2)$ zéros et 2 coefficients unitaires.

Si toutes les colonnes de T_k possèdent exactement 2 coefficients unitaires, l'un doit provenir des lignes sources et l'autre des lignes destinataires. Puisque la production est adaptée à la demande (*i. e.* $\sum a_i = \sum b_j$), la somme des lignes sources sera égale à la somme des lignes destinataires. Par conséquent, les lignes de T_k sont linéairement dépendantes, ce qui entraîne $\det(T_k) = 0$.

Dans le cas contraire, ou bien T_k possède une colonne nulle auquel cas $\det(T_k) = 0$, ou bien T_k admet une colonne avec un seul coefficient

unitaire. Le calcul de $\det(T_k)$ basé sur cette colonne donne $\det(T_k) = \pm\det(T_{k-1})$, où T_{k-1} est une sous-matrice d'ordre $(k-1)$. On reprend les mêmes arguments pour $\det(T_{k-1})$, $\det(T_{k-2})$, *etc.* On obtient finalement $\det(T_1)$ qui lui vaut 1 ou 0.

□

Remarquer que le résultat du Théorème 7.2.2 peut être prouvé aussi via ce dernier lemme. En effet, pour toute base B, la résolution du système linéaire $By_B = b$ par la méthode des déterminants garantit une solution à coefficients entiers au cas où le second membre b est entier.

Théorème 7.3.2 *Les éléments de la matrice $B^{-1}N$ ne peuvent prendre que les valeurs* 0, 1 *et* -1.

Démonstration. Toute base B n'est autre qu'une sous-matrice de M, d'ordre $(m+n-1)$ et inversible. Si on note N_{ij} (*resp.* β_{ij}) la colonne de N (*resp.* β) d'indice ij, on obtient :

$$\beta = B^{-1}N \Longleftrightarrow B\beta = N \Longleftrightarrow N_{ij} = B\beta_{ij},\ \forall ij \in J_N.$$

Le calcul de la matrice $\beta = B^{-1}N$ se ramène à la résolution des $[nm - (m+n-1)]$ systèmes de Cramer $N_{ij} = B\beta_{ij}$. Grâce au lemme précédent, la résolution de ces systèmes linéaires par la méthode des déterminants assure que les coefficients du vecteur colonne β_{ij} sont 0 ou ± 1.

□

La matrice $\beta = B^{-1}N$, qui possède $[nm-(m+n-1)] = (m-1)(n-1)$ colonnes, peut être définie d'une façon équivalente par l'égalité $B\beta = N$. Cela veut dire que la colonne d'indice ij de β est formée par les coefficients qui permettent d'écrire la colonne N_{ij} de N comme combinaison linéaire des vecteurs colonnes de B. Cette écriture est unique en raison de la régularité de B. Par ailleurs, les vecteurs colonnes de B sont tous de taille $(m+n-1)$. Ils ont été choisis à partir des colonnes de M qui contiennent un élément en excédent par rapport aux vecteurs colonnes de B. Si on ajoute l'élément excédentaire à chaque vecteur colonne de B, on obtient une matrice, que l'on note $\bar{B}$, ayant $(m+n)$ lignes et $(m+n-1)$ colonnes. On fait de même pour la matrice N, ce qui nous conduit à une matrice que l'on note communément par $\bar{N}$.

Puisque $rang(M) = m+n-1$ et les $(m+n-1)$ vecteurs colonnes de $\bar{B}$ sont linéairement indépendants, chaque colonne ij de $\bar{N}$ s'écrit d'une façon unique comme combinaison linéaire des vecteurs colonnes de $\bar{B}$. Les coefficients régissant cette combinaison linéaire correspondent exactement au $ij^{\text{ième}}$ vecteur colonne de $\beta = B^{-1}N$. Autrement dit, on a non seulement $B\beta = N$ mais aussi $\bar{B}\beta = \bar{N}$. En conséquence, l'écriture de chaque colonne de $\bar{N}$ (à fortiori de M) au terme des colonnes de $\bar{B}$ suffit pour déterminer explicitement la matrice β. Pour ce faire, nous allons tirer profit du théorème précédent.

Exemple 32 Soit

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 7 & 1 & 8 \\ 2 & 10 & 2 & 10 \end{pmatrix} \text{ et } b = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

1 - Montrer que $rang(M) = 2$ et que le système linéaire $My = b$ est compatible.

2 - Considérons la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 8 \end{pmatrix}.$$

a - Montrer que B est une base réalisable du système $My = b$ et $y \geq 0_{\mathbb{R}^4}$, puis calculer $B^{-1}N$.

b - Exprimer les colonnes de $\bar{N}$ au terme des colonnes de $\bar{B}$ avec :

$$\bar{N} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 7 \\ 2 & 10 \end{pmatrix} \text{ et } \bar{B} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 8 \\ 2 & 10 \end{pmatrix}.$$

c - Que peut-on conclure ?

Considérons la troisième ligne de la matrice M et essayons de voir s'il est possible de l'exprimer en tant que combinaison linéaire des deux premières lignes :

$$(2, 10, 2, 10) = \mu(-1, 1, 1, -1) + \nu(2, 7, 1, 8)$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} -\mu + 2\nu = 2 \\ \mu + 7\nu = 10 \\ \mu + \nu = 2 \\ -\mu + 8\nu = 10 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \mu = \frac{2}{3} \\ \nu = \frac{4}{3}. \end{cases}$$

Ainsi, le rang de M est inférieur à 3. D'autre part, puisque les deux premières lignes de M ne sont pas colinéaires, le rang de la matrice M vaut exactement 2. Concernant la compatibilité du système linéaire $My = b$, elle découle immédiatement de l'égalité $\mu b_1 + \nu b_2 = b_3$, c'est à dire $\frac{2}{3} \times 1 + \frac{4}{3} \times 7 = 10$.

Pour la matrice B, il est facile de vérifier qu'elle est inversible. De plus, on a :

$$B^{-1}b = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 8 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

Puisque $B^{-1}b \geq 0_B$, la base B est réalisable. Le calcul du produit matriciel $B^{-1}N$ donne :

$$B^{-1}N = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 8 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{5}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

Par ailleurs, les colonnes de $\bar{N}$ s'expriment au terme des colonnes de $\bar{B}$ de la façon suivante :

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = -\frac{2}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 \\ 8 \\ 10 \end{pmatrix},$$

et

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 10 \end{pmatrix} = \frac{5}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{2}{3}\begin{pmatrix} -1 \\ 8 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

Ces deux égalités peuvent être résumées en une seule égalité matricielle :

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 7 \\ 2 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 8 \\ 2 & 10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{5}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

On retrouve ainsi l'égalité $\bar{B}\beta = \bar{N}$ où $\beta = B^{-1}N$. Cet exemple illustre, à travers une simple application, que le système $\bar{B}\beta = \bar{N}$ est un moyen qui permet de définir d'une façon unique la matrice $\beta = B^{-1}N$.

Dans l'égalité $My = b$, les variables du vecteur y sont ordonnées de sorte que y_{ij} apparaisse à la coordonnée d'indice $((i-1)n+j)$ de y (voir démonstration du Théorème 7.2.1). Par analogie, on note par M_{ij} le vecteur colonne correspondant à la colonne $((i-1)n+j)$ de M (*i. e.* $My = \sum y_{ij}M_{ij}$). D'après l'expression de la matrice M

(voir démonstration du Théorème 7.2.1), il est facile de vérifier que $M_{ij} = \bar{e}_i + \bar{e}_{m+j}$ où $\bar{e}_k$; $k = 1, \ldots, m+n$; sont les vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^{n+m}$. Pour chaque base réalisable B, on note par M_{lk}^B ; $lk \in J_B$; les vecteurs colonnes de $\bar{B}$. Puisque les seuls coefficients non nuls de β sont ± 1, toute colonne M_{ij} de $\bar{N}$ s'écrit comme suit :

$$M_{ij} = \sum_{lk \in L_{ij}^+} M_{lk}^B - \sum_{lk \in L_{ij}^-} M_{lk}^B, \text{ avec } \begin{cases} L_{ij}^+ = \{lk \in J_B / \beta_{lk,ij} = 1\} \\ L_{ij}^- = \{lk \in J_B / \beta_{lk,ij} = -1\}. \end{cases}$$

Comme $M_{ij} = \bar{e}_i + \bar{e}_{m+j}$, un vecteur de la forme $M_{iu}^B = \bar{e}_i + \bar{e}_{m+u}$ doit nécessairement figurer parmi les vecteurs de la somme sur les indices $lk \in L_{ij}^+$. Le vecteur $\bar{e}_{m+u}$ doit être à son tour annulé par un élément de la forme M_{vu}^B ; $vu \in L_{ij}^-$; et ainsi de suite. Par conséquent, le vecteur M_{ij} s'écrit sous la forme suivante :

$$M_{ij} = M_{iu}^B - M_{vu}^B + M_{vt}^B - \ldots - M_{wr}^B + M_{wj}^B. \tag{7.2}$$

Cette égalité fournit les composantes du vecteur colonne β_{ij} de la matrice β :

$$\begin{cases} \beta_{iu,ij} = 1,\ \beta_{vu,ij} = -1,\ \beta_{vt,ij} = 1,\ \ldots,\ \beta_{wr,ij} = -1,\ \beta_{wj,ij} = 1 \\ \beta_{lk,ij} = 0 \text{ pour } lk \in J_B \setminus (L_{ij}^+ \cup L_{ij}^-). \end{cases} \tag{7.3}$$

Remarquer que M_{ij} s'exprime en fonction d'un nombre impair de vecteurs de la base et que cette expression alterne entre $+1$ et -1. Essayons d'interpréter l'égalité (7.2) au moyen des cases du tableau de transport. Prenons une case (i, j) hors base, celle-ci correspond au vecteur M_{ij} de $\bar{N}$. Pour trouver la combinaison linéaire (7.2), il faut chercher sur la ligne i une case (i, u) de type Ⓑ telle que la colonne u contienne une autre case de base (v, u). Puis, on applique la même procédure sur la ligne v, et ainsi de suite jusqu'au moment où on rencontre une case (w, j) de type Ⓑ qui est située sur la même colonne j de la case initiale (i, j). Il est intéressant de préciser que ce chemin est unique, puisque la combinaison linéaire qui exprime M_{ij} en fonction des vecteurs colonnes de $\bar{B}$ est également unique.

Afin d'illustrer cette technique, essayons de trouver l'expression du vecteur hors base M_{11} en fonction de la base initiale obtenue par la méthode de Russel. Pour une meilleure lisibilité, on reprend ci-après la base réalisable initiale schématisée dans la Figure 7.9.

10	8	5 (60)	7	4 (10)	70
8 (40)	6	9	4 (30)	3 (0)	70
10	4 (70)	5	8	2 (10)	80
40	70	60	30	20	1080

Sur la ligne 1, on est obligé de retenir la case de base $(1,5)$ étant donnée que la colonne de la case $(1,3)$ ne contient aucun autre élément encerclé. Maintenant, sur la colonne 5 on est contraint de choisir la case de base $(2,5)$ pour terminer le chemin à la case $(2,1)$, cette dernière est bien située sur la même colonne que la case initiale $(1,1)$. Pour récapituler, on a $M_{11} = M_{15}^B - M_{25}^B + M_{21}^B$. D'une façon similaire, on montre par exemple que $M_{12} = M_{15}^B - M_{35}^B + M_{32}^B$.

Cycles de changement

Examinons maintenant comment calculer le vecteur des coûts réduits, celui-ci étant défini par $w_N^* = c_B^* B^{-1} N - c_N^*$. Pour chaque case hors base (i,j), la composante w_{ij} de w_N^* est le produit scalaire de c_B^* par la colonne β_{ij} de $\beta = B^{-1}N$, auquel on soustrait le coût unitaire c_{ij}. Compte tenu de l'égalité (7.3), on obtient :

$$w_{ij} = (c_{iu} - c_{vu} + c_{vt} - \ldots - c_{wr} + c_{wj}) - c_{ij}. \tag{7.4}$$

Pour la base initiale obtenue via la méthode de Russel, on a :

$$\begin{aligned}
M_{11} &= M_{15}^B - M_{25}^B + M_{21}^B &\Longrightarrow\quad w_{11} &= 4 - 3 + 8 - 10 = -1\\
M_{12} &= M_{15}^B - M_{35}^B + M_{32}^B &\Longrightarrow\quad w_{12} &= 4 - 2 + 4 - 8 = -2\\
M_{14} &= M_{15}^B - M_{25}^B + M_{24}^B &\Longrightarrow\quad w_{14} &= 4 - 3 + 4 - 7 = -2\\
M_{22} &= M_{25}^B - M_{35}^B + M_{32}^B &\Longrightarrow\quad w_{22} &= 3 - 2 + 4 - 6 = -1\\
M_{23} &= M_{25}^B - M_{15}^B + M_{13}^B &\Longrightarrow\quad w_{23} &= 3 - 4 + 5 - 9 = -5\\
M_{31} &= M_{35}^B - M_{25}^B + M_{21}^B &\Longrightarrow\quad w_{31} &= 2 - 3 + 8 - 10 = -3\\
M_{33} &= M_{35}^B - M_{15}^B + M_{13}^B &\Longrightarrow\quad w_{33} &= 2 - 4 + 5 - 5 = -2\\
M_{34} &= M_{35}^B - M_{25}^B + M_{24}^B &\Longrightarrow\quad w_{34} &= 2 - 3 + 4 - 8 = -5.
\end{aligned}$$

On note que tous les coûts réduits sont négatifs, la base réalisable initiale de Russel est donc optimale. L'acheminement optimal consiste à satisfaire les centres :

C_1 à partir du laboratoire L_2,
C_2 à partir de L_3,
C_3 à partir de L_1,
C_4 à partir de L_2,
C_5 en prenant 10 unités de L_1 et 10 autres de L_3.

En raison de l'unité choisie pour les coûts unitaires de transport ($c_{ij} \to c_{ij}/20$), le coût optimal de transport de marchandise est égal à $1080 \times 20 = 21.600$DT.

Reprenons à présent l'égalité (7.2) qui exprime chaque vecteur colonne de $\bar{N}$ en fonction des colonnes de $\bar{B}$. En reliant les cases (i,j) ; (i,u) ; (v,u) ; (v,t) ; $\ldots$; (w,r) et (w,j) par des lignes droites, on obtiendrait une boucle fermée si on ajoutait une ligne entre la dernière case (w,j) et la case initiale (i,j). Cette suite de cases $<(i,j);(i,u);(v,u);(v,t);\ldots;(w,r);(w,j);(i,j)>$ s'appelle **cycle de changement** ou **stepping-stone**. La Figure 7.10 propose un exemple de cycle de changement.

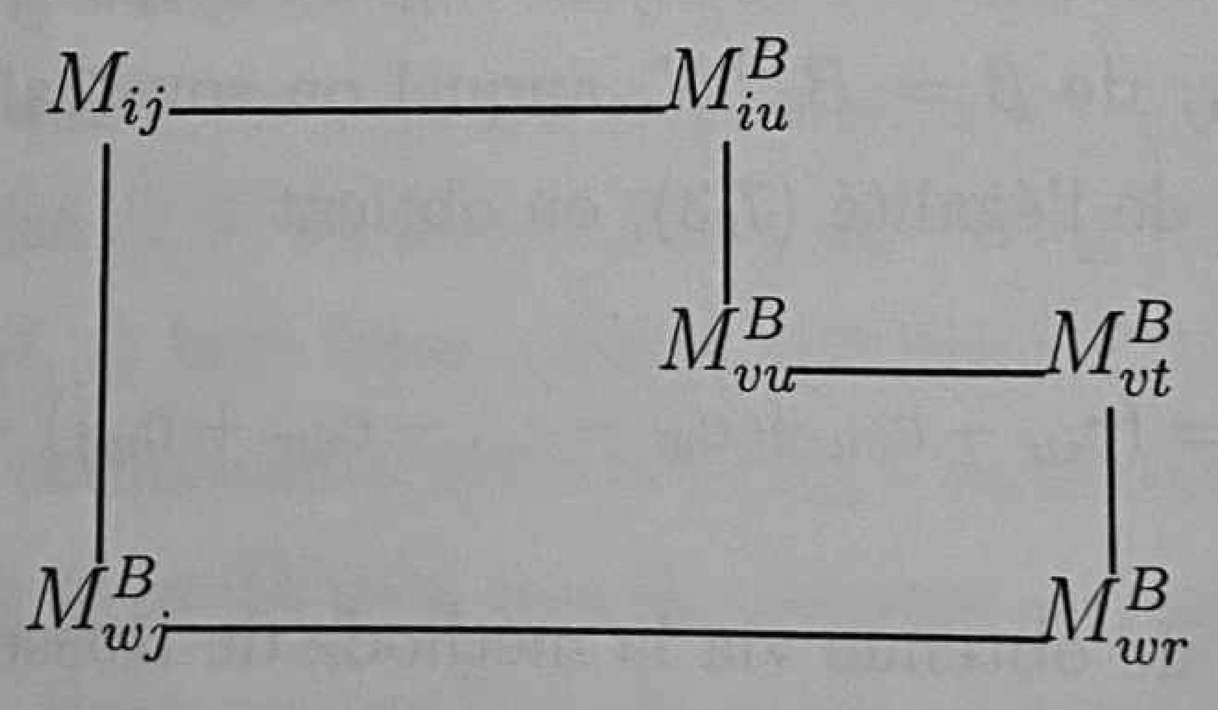


FIG. 7.10 – Illustration d'un cycle de changement

Tout cycle de changement vérifie les propriétés suivantes :

1. le chemin est constitué d'une suite d'arcs successivement horizontaux et verticaux,
2. le dernier arc est orthogonal au premier,
3. le chemin ne passe jamais par le même vecteur de base.

La Figure 7.11 montre deux exemples de boucles qui ne forment pas un cycle de changement. Pour la première boucle, le dernier arc n'est pas

orthogonal au premier. Quant à la deuxième boucle, les deux premiers arcs sont alignés mais non orthogonaux.

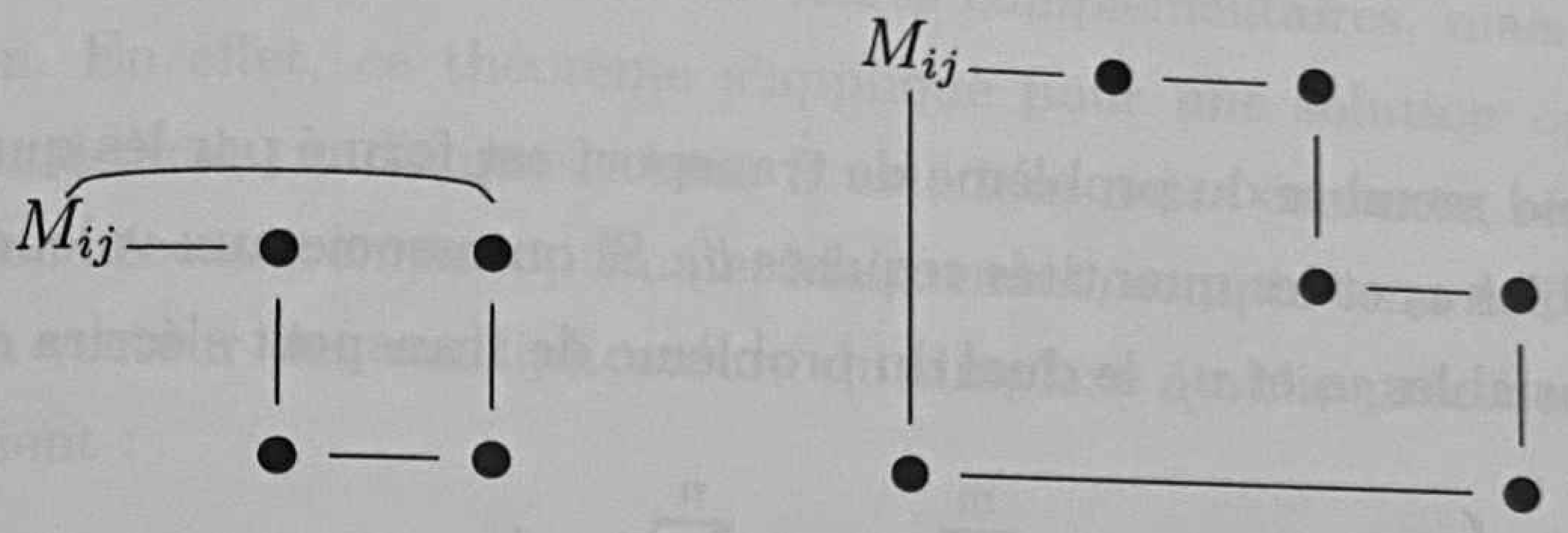


FIG. 7.11 – Exemples de mauvais cycles de changement

Calculons les coûts réduits pour la base réalisable obtenue par la méthode de plus faible coût. La Figure 7.12 montre en pointillé le cycle de changement de la case hors base $(1, 5)$. On aimerait attirer l'attention sur le fait que ce cycle de changement ne passe pas par la case de base $(1, 3)$. D'après ce chemin, on a $M_{15} = M_{11}^B - M_{21}^B + M_{22}^B - M_{32}^B + M_{35}^B$, et par suite $w_{15} = 10 - 8 + 6 - 4 + 2 - 4 = 2$. Tous les coûts réduits sont reportés sur cette figure. On constate que $w_N^* \not\leq 0_N^*$ et que la base est non dégénérée, donc la solution initiale fournie par la méthode de plus faible coût n'est pas optimale.

[10] (10)	[8] 0	[5] (60)	[7] −1	[4] 2	70
[8] (30)	[6] (10)	[9] −6	[4] (30)	[3] 1	70
[10] −4	[4] (60)	[5] −4	[8] −6	[2] (20)	80
40	70	60	30	20	1100

FIG. 7.12 – Tableau I par la méthode de plus faible coût

7.3.2 Méthode des potentiels

Afin de calculer les coûts réduits, la méthode des cycles de changement exige la détermination d'un nombre assez important de boucles pour les différentes cases hors base. Cette technique est fastidieuse surtout au niveau de l'implémentation sur machine. A la différence de cette technique, la méthode des potentiels, dûe à G. B. Dantzig [7], nécessite

la résolution d'un simple système linéaire. Tirant profit de la dualité en programmation linéaire, elle calcule directement le vecteur des coûts réduits.

Le second membre du problème de transport est formé par les quantités disponibles a_i et les quantités requises b_j. Si on associe aux valeurs a_i et b_j les variables u_i et v_j, le dual du problème de transport s'écrira comme suit :

$$\begin{cases} \max[Z(u,v) = \sum_{i=1}^{m} a_i u_i + \sum_{j=1}^{n} b_j v_j] \\ u_i + v_j \leq c_{ij},\ \forall i,j \\ u = (u_1,\ldots,u_m) \text{ et } v = (v_1,\ldots,v_n) \text{ sont s. r. s.} \end{cases}$$

Les inégalités $u_i + v_j \leq c_{ij}$ sont équivalentes à la relation matricielle $(u^*\ v^*)M \leq c^*$, où c^* est le vecteur ligne formé par les coûts unitaires c_{ij}. Il est utile de rappeler que le problème de transport, qui est considéré ici comme primal, admet une contrainte d'égalité redondante que l'on peut éliminer. D'ailleurs, on a vu que l'on peut supprimer n'importe quelle contrainte. Si on suppose que le choix d'élimination était fixé sur la première contrainte, la variable u_1 serait absente du problème dual, c'est à dire $u_1 = 0$. Prenons maintenant une base réalisable B du primal. On suppose bien sûr que les colonnes de B ne sont pas celles de la matrice M mais de M ôtée de sa première ligne. Alors, le vecteur des multiplicateurs du simplexe $c_B^* B^{-1}$ vérifie :

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} u_2 & \ldots & u_m & v_1 & \ldots & v_n \end{pmatrix} = c_B^* B^{-1} \\ \Longleftrightarrow\ & \begin{pmatrix} u_2 & \ldots & u_m & v_1 & \ldots & v_n \end{pmatrix} B = c_B^* \\ \Longleftrightarrow\ & \begin{cases} \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & \ldots & u_m & v_1 & \ldots & v_n \end{pmatrix} \bar{B} = c_B^* \\ u_1 = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Puisque les colonnes de M, et en particulier de $\bar{B}$, sont de la forme $M_{ij} = \bar{e}_i + \bar{e}_{m+j}$, où $\bar{e}_k$; $k = 1,\ldots,m+n$; sont les vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^{m+n}$, on obtient :

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} u_2 & \ldots & u_m & v_1 & \ldots & v_n \end{pmatrix} = c_B^* B^{-1} \\ \Longleftrightarrow\ & \begin{cases} u_l + v_k = c_{lk},\ \forall\, lk \in J_B \\ u_1 = 0. \end{cases} \end{aligned} \tag{7.5}$$

En raison de la régularité de la matrice B, le système linéaire (7.5), qui admet $(m+n)$ équations et $(m+n)$ inconnues, est de Cramer. Noter

également que les relations $u_l + v_k = c_{lk}$ pour $lk \in J_B$ représentent pour le problème dual des contraintes saturées pour les indices de base. Cela nous fait penser au théorème des écarts complémentaires, mais il n'en est rien. En effet, ce théorème s'applique pour une solution optimale du primal-dual, tandis que la base B est, dans notre contexte, réalisable mais non nécessairement optimale. Maintenant, compte tenu de l'expression du vecteur des multiplicateurs du simplexe établie précédemment, on obtient :

$$\begin{aligned} w_N^* &= c_B^* B^{-1} N - c_N^* \\ &= (\ u_2 \ \ldots \ u_m \ \ v_1 \ \ldots \ v_n\ ) N - c_N^* \\ &= (\ u_1 \ \ u_2 \ \ldots \ u_m \ \ v_1 \ \ldots \ v_n\ ) \bar{N} - c_N^*, \text{ avec } u_1 = 0. \end{aligned}$$

Etant donné que les vecteurs colonnes de $\bar{N}$ sont de la forme $\bar{e}_i + \bar{e}_{m+j}$, on conclut que :

$$w_{ij} = u_i + v_j - c_{ij}, \ \forall ij \in J_N. \tag{7.6}$$

Dans ces égalités, les valeurs des u_i et v_j sont calculées à partir de la résolution du système linéaire (7.5). Appliquons à présent la méthode des potentiels à la base réalisable initiale obtenue par la méthode de Russel. Le système linéaire $(u^* \ v^*)\bar{B} = c_B^*$ se traduit par : (voir Figure 7.9)

$$\begin{cases} u_1 + v_3 = 5 \\ u_1 + v_5 = 4 \\ u_2 + v_1 = 8 \\ u_2 + v_4 = 4 \\ u_2 + v_5 = 3 \\ u_3 + v_2 = 4 \\ u_3 + v_5 = 2. \end{cases}$$

Puisque $u_1 = 0$, on obtient consécutivement $v_3 = 5$, $v_5 = 4$, $u_2 = -1$, $v_4 = 5$, $v_1 = 9$, $u_3 = -2$ et $v_2 = 6$. Dans le cas d'un calcul manuel, on a intérêt à ajouter au tableau de transport une $(n+2)^{\text{ième}}$ colonne contenant les u_i et une $(m+2)^{\text{ième}}$ ligne contenant les v_j. Pour calculer les coûts réduits, on utilise la relation (7.6).

La Figure 7.13 donne le premier tableau de transport relatif à la base initiale de Russel. On retrouve les mêmes coûts réduits obtenus par la méthode des cycles de changement. On sait qu'au niveau de l'optimum, l'équilibre économique du primal-dual est atteint (*i.e.* $\psi = Z$). D'ailleurs,

[10] -1	[8] -2	[5] (60)	[7] -2	[4] (10)	70	$u_1 = 0$
[8] (40)	[6] -1	[9] -5	[4] (30)	[3] (0)	70	$u_2 = -1$
[10] -3	[4] (70)	[5] -2	[8] -5	[2] (10)	80	$u_3 = -2$
40	70	60	30	20	1080	

$v_1 = 9$ $v_2 = 6$ $v_3 = 5$ $v_4 = 5$ $v_5 = 4$

FIG. 7.13 – Tableau I par la méthode de Russel

la valeur duale $Z(u,v) = \sum a_i u_i + \sum b_j v_j$, appliquée à u et v de la Figure 7.13, correspond exactement à l'optimum 1080 (facile à vérifier).

On aimerait rappeler que la condition $u_1 = 0$ est dûe au fait que le choix d'élimination de la ligne redondante de M est effectué sur la première ligne. Ce choix n'est pas unique, on peut en effet supprimer n'importe quelle ligne de M, puisque chacune est une combinaison linéaire de toutes les autres. Cela a pour conséquence le remplacement de l'équation $u_1 = 0$, figurant dans le système (7.5), par $u_i = 0$ ou encore $v_j = 0$. Bien sûr, cela va affecter la solution du système linéaire. Toutefois, les valeurs des coûts réduits $w_{ij} = u_i + v_j - c_{ij}$ restent intactes. Le critère proposé par Dantzig [8] qui permet de fixer ce choix est le suivant : parmi les lignes et les colonnes du tableau de transport, retenir celle qui contient le plus grand nombre d'éléments encerclés. S'il s'agit de la ligne i, poser $u_i = 0$ et s'il s'agit de la colonne j, poser $v_j = 0$. Pour l'exemple de la Figure 7.13, on peut choisir arbitrairement entre la deuxième ligne et la cinquième colonne, qui chacune d'entre elles contient trois éléments de base. Dans notre situation, il est plus commode de fixer $v_5 = 0$, puisque les éléments encerclés de cette colonne couvre toutes les lignes du tableau de transport. Le système linéaire $u_l + v_k = c_{lk}$; $lk \in J_B$; donne consécutivement $u_1 = 4$, $u_2 = 3$, $u_3 = 2$, $v_1 = 5$, $v_2 = 2$, $v_3 = 1$ et $v_4 = 1$. On vérifie aisément que ces nouvelles valeurs des u_i et des v_j aboutissent aux mêmes coûts réduits $w_{ij} = u_i + v_j - c_{ij}$ reportés sur la Figure 7.13.

7.4 Amélioration du coût de transport

Ce paragraphe est consacré à la construction d'une base réalisable ayant un meilleur coût de transport par rapport à une base réalisable déjà disponible. La règle du meilleur coût marginal sera bien entendu mise en application.

7.4.1 Mise en œuvre du simplexe

On suppose que l'on dispose d'une base réalisable B qui vérifie $w_N^* \not\leq 0_N^*$. La règle du meilleur coût marginal nous permet de choisir la variable hors base y_{ij}, qui vérifie $w_{ij} = \max_{rs \in J_N} w_{rs}$, comme candidate pour accéder au nouvel ensemble de variables de base. Afin de déterminer la variable sortante, il va falloir calculer le paramètre λ. Par définition, λ est le minimum des ratios entre les composantes de la solution de base et les éléments strictement positifs de la colonne de β relative au coût marginal retenu w_{ij} :

$$\lambda = \min\{\frac{y_{lk}^B}{\beta_{lk,ij}} / \beta_{lk,ij} > 0 \text{ et } lk \in J_B\}.$$

D'après le Théorème 7.3.2, le seul élément strictement positif de la matrice β est l'unité. Alors, on obtient :

$$\lambda = \min\{y_{lk}^B / \beta_{lk,ij} = 1 \text{ et } lk \in J_B\}.$$

Dans le but de déceler les cases de base (l, k) vérifiant $\beta_{lk,ij} = 1$, il suffit d'établir le cycle de changement relatif à la case hors base (i, j). Ainsi, la formule (7.3) permettra d'affirmer que :

$$\lambda = \min\{y_{iu}^B,\ y_{vt}^B, \ldots, y_{wj}^B\}.$$

Pour illustrer cette technique, on reprend ci-après le premier tableau de transport obtenu par la méthode de plus faible coût.

10 / (10)	8 / 0	5 / (60)	7 / −1	4 / 2	70
8 / (30)	6 / (10)	9 / −6	4 / (30)	3 / 1	70
10 / −4	4 / (60)	5 / −4	8 / −6	2 / (20)	80
40	70	60	30	20	1100

Le plus grand élément strictement positif du vecteur w_N^* est $w_{15} = 2$. Le cycle de changement relatif à la case hors base $(1, 5)$ est schématisé en pointillé. D'après cette boucle, les cases de base (l, k) vérifiant $\beta_{lk,15} = 1$ sont $(1, 1)$; $(2, 2)$ et $(3, 5)$. Une fois les éléments unitaires de la colonne β_{15} détectés, on est en mesure de calculer λ :

$$\lambda = \min\{y_{11}^B, y_{22}^B, y_{35}^B\} = \min\{10, 10, 20\} = 10.$$

Cette fois-ci le minimum λ est atteint pour deux indices de base différents. Il s'agit des cases $(1, 1)$ et $(2, 2)$. Le choix entre ces deux cases peut se faire d'une façon purement aléatoire mais, sachant que le choix retenu correspond à la variable sortante, il est préférable de prendre la case ayant le plus grand coût unitaire de transport. En effet, cette variable retenue devient une variable hors base à l'itération qui suit, dans laquelle on espère que w_N^* soit négatif. D'après la formule (7.4), le coût unitaire de transport c_{ij} est retranché de la quantité $(c_{iu} - c_{vu} + c_{vt} - \ldots - c_{wr} + c_{wj})$. En prenant c_{ij} "grand", on a plus de chance que w_{ij} soit négatif, ce qui correspond à la condition souhaitée. Selon cette logique, lorsque le maximum w_{ij} parmi les coûts réduits strictement positifs est atteint pour plusieurs indices, il est souhaitable de retenir la case possédant le plus faible coût unitaire de transport. D'ailleurs, c'est la raison pour laquelle les méthodes de recherche d'une base initiale retiennent, en cas de dégénérescence, la case ayant le plus faible coût unitaire de transport pour attribuer la valeur zéro.

Reprenons maintenant notre exemple et essayons de déterminer la nouvelle base réalisable. La case hors base $(1, 5)$ devient une case de base pour laquelle on attribue la valuer $\lambda = 10$. Entre les variables $y_{11}^B = 10$ et $y_{22}^B = 10$, on choisit celle qui admet le plus grand coût unitaire de transport. Il s'agit de la variable y_{11}^B qui devient à son tour une variable hors base. Pour les autres variables de base, on applique la formule récurrente :

$$y_{lk}^B \leftarrow y_{lk}^B - \lambda\beta_{lk,ij},$$

qui est une traduction de la formule $(B^{-1}b)_i \leftarrow (B^{-1}b)_i - \lambda\gamma_i$. De cette façon, la base réalisable à la deuxième itération est telle que :

$$\begin{aligned}
y^B_{13} &= 60 - \lambda \times 0 = 60, \text{ car } \beta_{13,15} = 0 \\
y^B_{15} &= \lambda = 10 \\
y^B_{21} &= 30 - \lambda \times (-1) = 40 \\
y^B_{22} &= 10 - \lambda \times 1 = 0 \\
y^B_{24} &= 30 - \lambda \times 0 = 30 \\
y^B_{32} &= 60 - \lambda \times (-1) = 70 \\
y^B_{35} &= 20 - \lambda \times 1 = 10.
\end{aligned}$$

Cette solution de base réalisable est reportée dans la Figure 7.14. On vérifie aisément que le nombre d'éléments encerclés est adéquat, et que cette solution est effectivement réalisable (la somme sur chaque ligne i est a_i et la somme sur chaque colonne j est b_j). Pour le coût de transport total relatif à cette base, soit on calcule $\psi = \sum c_{ij} y^B_{ij}$, soit on utilise la formule $\psi \leftarrow \psi - \lambda w_{ij}$ c'est à dire $\psi = 1100 - 10 \times 2 = 1080$.

[10] −2	[8] −2	[5] (60)	[7] −3	[4] (10)	70	$u_1 = 0$
[8] (40)	[6] (0)	[9] −4	[4] (30)	[3] 1	70	$u_2 = 0$
[10] −4	[4] (70)	[5] −2	[8] −6	[2] (10)	80	$u_3 = -2$
40	70	60	30	20	1080	
$v_1 = 8$	$v_2 = 6$	$v_3 = 5$	$v_4 = 4$	$v_5 = 4$		

FIG. 7.14 – Tableau II de transport

Pour le calcul du vecteur des coûts réduits, on peut utiliser la méthode des cycles de changement ou la méthode des potentiels. On a convenu d'appliquer sur cet exemple la méthode des potentiels. Le système linéaire $(u^* \;\; v^*)\bar{B} = c^*_B$ s'écrit comme suit :

$$\begin{cases}
u_1 + v_3 = 5 \\
u_1 + v_5 = 4 \\
u_2 + v_1 = 8 \\
u_2 + v_2 = 6 \\
u_2 + v_4 = 4 \\
u_3 + v_2 = 4 \\
u_3 + v_5 = 2.
\end{cases}$$

La ligne/colonne contenant le plus grand nombre d'éléments encerclés est la ligne 2. Donc, on prend $u_2 = 0$, ce qui aboutit consécutivement à $v_1 = 8$, $v_2 = 6$, $v_4 = 4$, $u_3 = -2$, $v_5 = 4$, $u_1 = 0$ et $v_3 = 5$. Les valeurs w_{ij} seront déterminés via la formule $w_{ij} = u_i + v_j - c_{ij}$.

Nous observons sur le tableau II de transport que le vecteur w_N^* n'est pas négatif, malgré cela la valeur optimale 1080 est atteinte. L'explication peut être donnée par le Théorème 2.3.1. La condition "$w_N^* \leq 0_N^*$" est seulement une condition suffisante d'optimalité, elle devient nécessaire en cas de non dégénérescence. D'ailleurs, la solution de base de la Figure 7.14 est dégénérée. Pour passer au tableau III, on détecte facilement l'unique élément strictement positif, du vecteur des coûts réduits, qui est en l'occurrence $w_{25} = 1$. Le cycle de changement de cette case hors base est schématisé en pointillé dans la Figure 7.14. Evidemment, cette boucle ne passe pas par la case de base $(2, 4)$, autrement elle n'est plus un cycle de changement (les deux premiers arcs ne sont pas orthogonaux). Alors, on obtient :

$$\begin{aligned}\lambda &= \min\{y_{lk}^B \;/\; \beta_{lk,25} = 1 \text{ et } lk \in J_B\} \\ &= \min\{y_{22}^B, y_{35}^B\} \\ &= \min\{0, 20\} \\ &= 0.\end{aligned}$$

Ainsi, la case de base $(2, 2)$ se transforme en hors base et la valeur $\lambda = 0$ se trouve transférée de la case $(2, 2)$ à $(2, 5)$. Puisque $\lambda = 0$, la formule $y_{lk}^B \leftarrow y_{lk}^B - \lambda\beta_{lk,25}$; $(l, k) \neq (2, 2)$; permet de laisser intactes les valeurs des autres variables de base. La nouvelle base réalisable est reportée dans la Figure 7.15. On reconnaît facilement qu'il s'agit de la solution optimale obtenue par la méthode de Russel.

7.4.2 Méthode récursive

Mise à part l'itération finale, la méthode des potentiels est contrainte à déterminer le cycle de changement de la variable entrante dans le but de trouver la variable sortante. Quant à la méthode des cycles de changement, elle cherche, à chaque itération, $(n-1)(m-1)$ cycles de changement afin de calculer le vecteur des coûts réduits. Pour des problèmes de

[10] −1	[8] −2	[5] (60)	[7] −2	[4] (10)	70
[8] (40)	[6] −1	[9] −5	[4] (30)	[3] (0)	70
[10] −3	[4] (70)	[5] −2	[8] −5	[2] (10)	80
40	70	60	30	20	1080

FIG. 7.15 – Tableau III de transport

petite taille, la détermination de ces boucles peut être réalisée à la main, sans la moindre peine. Mais au niveau de l'implémentation, cela exige des calculs sophistiqués surtout pour des problèmes de grande taille. Le point commun entre ces deux méthode est que le calcul des coûts réduits se fait directement à partir de la base courante, sans recours au tableau précédent. L'objet de la méthode récursive est d'une autre alternative : exploiter au mieux l'algorithme du simplexe pour que le calcul du vecteur w_N^* soit récursif. Concernant le tableau initial, il faut impérativement utiliser l'une des deux méthodes citées précédemment.

Considérons une base réalisable B' qui est issue directement d'une autre base B. Tirant profit du Théorème 2.4.1, le vecteur $w_{N'}^*$ est entièrement déterminé par la donnée de w_N^* et de la ligne du pivot de la matrice $\beta = B^{-1}N$. On suppose donc que le tableau de transport relatif à B est entièrement rempli, et on se propose d'appliquer l'algorithme du simplexe pour passer au tableau suivant. Le paragraphe précédent a expliqué comment il faut procéder pour trouver la nouvelle solution de base relative à B'. En ce qui concerne le vecteur des coûts réduits $w_{N'}^*$, cela se résume à la détermination de la ligne du pivot de la matrice $\beta = B^{-1}N$.

Pour le tableau simplexe, la ligne du pivot correspond à la ligne du tableau associée à la variable sortante. Le paramètre λ est à juste titre le rapport entre la valeur de cette variable sortante et le pivot. Tout pivot est par construction strictement positif. Pour un problème de transport le seul élément strictement positif de la matrice β est 1. Donc, la ligne du pivot va correspondre à $e_q^*\beta$, où e_q^* est le vecteur de la base canonique

de $\mathbb{R}^{m+n-1}$ ayant 1 au niveau de la coordonnée de base pour laquelle λ est atteint. Il est déjà établi que toute solution de base admet exactement $(m+n-1)$ éléments encerclés. Dans le but d'identifier e_q^*, on commence à compter le nombre d'éléments encerclés, ligne par ligne[1], jusqu'au moment où la variable sortante est rencontrée. Le numéro q de cette variable sortante est l'indice q de l'élément unité de e_q^*. A titre d'exemple, l'élément de la base canonique de $\mathbb{R}^7$ relatif au tableau II de la Figure 7.14 est $e_q^* = e_4^*$. En effet, si on compte les éléments de base ligne par ligne, on retrouve la variable sortante, qui est $y_{22}^B = 0$, à la $4^{\text{ième}}$ position. De même, on peut observer sur le tableau initial de la Figure 7.12 que $e_q^* = e_1^*$.

Notons par (p, r) la case de la variable sortante relative au paramètre λ. Afin d'aboutir à la $q^{\text{ième}}$ ligne de la matrice $\beta = B^{-1}N$, on calcule consécutivement $e_q^* B^{-1}$ puis $(e_q^* B^{-1})N$. En ce qui concerne $e_q^* B^{-1}$, on a :

$$
\begin{aligned}
& \begin{pmatrix} u_2 & \ldots & u_m & v_1 & \ldots & v_n \end{pmatrix} = e_q^* B^{-1} \\
\iff & \begin{pmatrix} u_2 & \ldots & u_m & v_1 & \ldots & v_n \end{pmatrix} B = e_q^* \\
\iff & \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & \ldots & u_m & v_1 & \ldots & v_n \end{pmatrix} \bar{B} = e_q^*, \text{ avec } u_1 = 0 \\
\iff & \begin{cases} u_1 = 0 \\ u_p + v_r = 1 \\ u_l + v_k = 0, \ \forall\, lk \in J_B \setminus \{pr\}. \end{cases}
\end{aligned}
\tag{7.7}
$$

Par suite, on obtient :

$$
\begin{aligned}
e_q^* B^{-1} N &= \begin{pmatrix} u_2 & \ldots & u_m & v_1 & \ldots & v_n \end{pmatrix} N \\
&= \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & \ldots & u_m & v_1 & \ldots & v_n \end{pmatrix} \bar{N},
\end{aligned}
$$

où $(u_1\ u_2\ \ldots\ u_m\ v_1\ \ldots\ v_n)$ est la solution du système linéaire (7.7). Puisque la colonne d'indice ij de $\bar{N}$ est $\bar{e}_i + \bar{e}_{m+j}$, alors, à chaque case hors base (i, j), la composante, que l'on note t_{ij}, de la ligne $e_q^* B^{-1} N$ est égale à :

$$
t_{ij} = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & \ldots & u_m & v_1 & \ldots & v_n \end{pmatrix} [\bar{e}_i + \bar{e}_{m+j}] = u_i + v_j, \ \forall\, ij \in J_N
$$

[1] Le comptage doit être effectué ligne par ligne et non autrement, car les variables y_{ij} des contraintes $My = b$ du problème de transport sont classées selon cet ordre : y_{1j}, $j = 1, \ldots, n$, puis y_{2j} et ainsi de suite.

D'après le Théorème 7.3.2, les coefficients t_{ij} appartiennent à $\{-1,0,1\}$ pour tout $ij \in J_N$. Une fois les composantes de la ligne du pivot identifiées, on est en mesure de calculer le vecteur des coûts réduits relatif à la nouvelle base B'. Notons par (s,t) la case associée à la variable entrante. Compte tenu de la formule récursive liant $w^*_{N'}$ à w^*_N, établie dans le Théorème 2.4.1, on a :

$$\begin{cases} w'_{pr} = -\frac{w_{st}}{pivot} \\ w'_{ij} = w_{ij} - \frac{w_{st}t_{ij}}{pivot}, \text{ pour } ij \in J_N \text{ et } ij \neq st. \end{cases}$$

Etant donné que le pivot d'un problème de transport vaut 1, on obtient :

$$w'_{pr} = -w_{st} \text{ et pour } ij \neq st,\ w'_{ij} = \begin{cases} w_{ij} & \text{si } t_{ij} = 0 \\ w_{ij} - w_{st} & \text{si } t_{ij} = 1 \\ w_{ij} + w_{st} & \text{si } t_{ij} = -1. \end{cases} \tag{7.8}$$

Appliquons la méthode récursive pour calculer les coûts réduits du tableau II via le premier tableau de transport de la Figure 7.12. D'après cette figure, le plus grand coût réduit est $w_{st} = w_{15} = 2$ et la case de base sortante est $(p,r) = (1,1)$. Donc, à la case $(1,1)$ on attribue la valeur $-w_{st} = -2$, et la case $(1,5)$ se convertit en une case de base dans laquelle on affecte la valeur $\lambda = 10$. En ce qui concerne les autres cases hors base, il faut tout d'abord résoudre le système linéaire (7.7) :

$$\begin{cases} u_1 = 0 \\ u_1 + v_1 = 1 \\ u_1 + v_3 = 0 \\ u_2 + v_1 = 0 \\ u_2 + v_2 = 0 \\ u_2 + v_5 = 0 \\ u_3 + v_2 = 0 \\ u_3 + v_5 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} u_1 = 0 \\ v_1 = 1 \\ v_3 = 0 \\ u_2 = -1 \\ v_2 = 1 \\ v_4 = 1 \\ u_3 = -1 \\ v_5 = 1. \end{cases}$$

Ensuite, on calcule les termes $t_{ij} = u_i + v_j$ pour les indices hors base $ij \in J_N \setminus \{st\}$:

$$\begin{array}{lll} t_{12} = 1 & t_{14} = 1 & \\ t_{23} = -1 & t_{25} = 0 & \\ t_{31} = 0 & t_{33} = -1 & t_{34} = 0. \end{array}$$

Enfin, les nouveaux coûts réduits, que l'on note toujours w_{ij} (à la place de w'_{ij}), seront calculés via la formule (7.8) :

$$\begin{array}{lll} w_{12} = 0 - 2 = -2 & w_{14} = -1 - 2 = -3 & \\ w_{23} = -6 + 2 = -4 & w_{25} = 1 & \\ w_{31} = -4 & w_{33} = -4 + 2 = -2 & w_{34} = -6. \end{array}$$

On vérifie aisément que ces valeurs coïncident parfaitement aux coûts réduits du tableau II de la Figure 7.14. Cette méthode peut s'appliquer à nouveau dans le but de retrouver les coûts réduits du tableau III de la Figure 7.15. D'après le cycle de changement de la Figure 7.14, on a $(s,t) = (2,5)$ et $(p,r) = (2,2)$. Donc, la case $(2,2)$ qui devient hors base sera affectée du coût réduit $-w_{25} = -1$. Pour les indices hors base $ij \in J_N \setminus \{st\}$, on trouve :

$$\begin{array}{lll} t_{11} = -1 & t_{12} = 0 & t_{14} = -1 \\ t_{23} = 1 & & \\ t_{31} = -1 & t_{33} = 0 & t_{34} = -1. \end{array}$$

D'où

$$\begin{array}{lll} w_{11} = -2+1 = -1 & w_{12} = -2 & w_{14} = -3+1 = -2 \\ w_{23} = -4-1 = -5 & & \\ w_{31} = -4+1 = -3 & w_{33} = -2 & w_{34} = -6+1 = -5. \end{array}$$

On aimerait signaler que, par analogie avec la méthode des potentiels, la condition $u_1 = 0$ peut être remplacée par $u_p = 0$ ou $v_r = 0$ qui correspond à l'équation $u_p + v_r = 1$ du système (7.7). Il convient de choisir entre $u_p = 0$ et $v_r = 0$ selon que la ligne p ou la colonne r contienne le plus grand nombre d'éléments de base.

7.5 Problème d'affectation

Le cas particulier du problème de transport où $m = n$ et $a_i = b_j = 1$ pour tout i, j s'appelle problème d'affectation. Ce type de problème est souvent présenté dans le cadre du scénario suivant. Une entreprise dispose de n personnes qu'elle doit affecter à n postes, chaque personne devant avoir un poste et un seul. Le coût de formation d'une personne i lorsqu'elle est affectée au poste j est c_{ij}. Le but de l'entreprise étant d'affecter les n personnes de sorte que le coût total de formation soit minimal. Ce problème peut être formulé au terme d'un programme linéaire en variables 0–1. En posant pour chaque couple (i,j), la variable

$$y_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si la personne } i \text{ est affectée au poste } j \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

la formulation mathématique du problème d'affectation sera comme suit :

$$\begin{cases} \min[\psi(y) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}y_{ij}] \\ \sum_{j=1}^{n} y_{ij} = 1, & \text{pour } i = 1, \ldots, n \\ \sum_{i=1}^{n} y_{ij} = 1, & \text{pour } j = 1, \ldots, n \\ y_{ij} \in \{0,1\}, \forall\, i, j. \end{cases}$$

Les n premières contraintes expriment que chaque personne i doit être affectée à un et un seul poste. Les n dernières contraintes d'égalité traduisent le fait que chaque poste j est pris en charge par une et une seule personne. Les contraintes $y_{ij} \in \{0,1\}$ (variables 0–1) peuvent être remplacées par $y_{ij} \in \mathbb{R}^+$. Ainsi, le problème d'affectation se trouve identifié à un problème de transport. En effet, les $2n$ contraintes d'égalité ajoutées à la positivité des variables y_{ij} entraînent que $y_{ij} \in [0,1]$. D'autre part, étant donné que le second membre des contraintes est entier, d'après le Théorème 7.2.2, toute solution de base réalisable est entière. Les seules valeurs entières de l'intervalle $[0,1]$ étant 0 et 1, le problème d'affectation est identique à celui où les contraintes de positivité $y_{ij} \in \mathbb{R}^+$ remplacent les contraintes 0–1 : $y_{ij} \in \{0,1\}$.

Il est intéressant de noter que toute solution de base réalisable admet $(2n-1)$ variables de base et parmi ces variables seulement n variables sont égales à 1. Le problème d'affectation est donc dégénérée puisque toute solution de base comporte $(n-1)$ variables de base nulles. Alors, il faut prendre garde de ce fait lors de la recherche d'une base réalisable initiale.

Exemple 33 On considère le problème d'affectation dont la matrice des coûts est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 5 \\ 1 & 5 & 3 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Pour la recherche d'une base réalisable initiale, la méthode de plus faible coût est utilisée. En raison du nombre réduit de lignes et de colonnes, le calcul de w_N^* peut se faire, sans la moindre difficulté, par la méthode des

cycles de changement. Le résultat de ces deux opérations est transposé dans le Tableau I de la figure ci-dessous. On peut déjà remarquer que la règle du coin Nord-Ouest aboutit à la même solution de base réalisable. En pointillé, est schématisé le cycle de changement de l'unique case hors base ayant un coût réduit strictement positif. Pour le paramètre λ qui vaut $\min\{y_{22}^B = 1, y_{33}^B = 1\} = 1$, la variable possédant le plus grand coût unitaire c_{ij} est retenue. Il s'agit de la variable y_{22}^B qui sera obligée de quitter la base dans la deuxième itération. En ce qui concerne le vecteur w_N^* du Tableau II, sa détermination peut se faire aussi bien par la méthode récursive que par la méthode des potentiels ou encore la méthode des cycles de changement.

Tableau I

[1] (1)	[5] 0	[5] −1	1
[1] (0)	[5] (1)	[3] 1	1
[4] −7	[1] (0)	[0] (1)	1
1	1	1	6

Tableau II

[1] (1)	[5] −1	[5] −2	1
[1] (0)	[5] −1	[3] (1)	1
[4] −6	[1] (1)	[0] (0)	1
1	1	1	5

D'après le Tableau II, la stratégie optimale consiste à affecter la personne 1 au poste 1, la personne 2 au poste 3 et la personne 3 au poste 2. Le coût total dû à cette affectation est égal à 5. Par ailleurs, on voudrait signaler que l'application de la méthode des pénalités pour la recherche d'une base réalisable initiale permettrait d'obtenir, en une seule itération, la stratégie optimale d'affectation.

Pour un problème d'affectation, on est parfois amener non pas à minimiser un coût mais à maximiser une certaine performance. En fait, si d_{ij} désigne la degré de performance de la personne i lorsqu'elle est affectée au poste j, on a intérêt à chercher l'affectation du groupe qui réalise une performance maximale. Pour ce faire, il suffit de poser $c_{ij} = -d_{ij}$. Ainsi, le problème de maximisation se transforme en un problème d'affectation ordinaire. Si on veut absolument laisser le problème de maximisation tel quel, il faut prendre garde de l'expression du vecteur des coûts réduits. Plutôt que de poser $w_N^* = c_B^* B^{-1} N - c_N^*$,

le vecteur des coûts réduits pour un (PL) de type maximisation est $w_N^* = c_N^* - c_B^* B^{-1} N$. En conséquence, l'égalité (7.4) devient $w_{ij} = c_{ij} - (c_{iu} - c_{vu} + c_{vt} - \ldots - c_{wr} + c_{wj})$. Aussi, au fur et à mesure que l'algorithme progresse, il faut saisir la formule $Z \leftarrow Z + \lambda w_{ij}$ à la place de $\psi \leftarrow \psi - \lambda w_{ij}$ afin de mettre à jour la nouvelle valeur d'objectif.

7.6 Exercices

Exercice 7.6.1

On considère le problème consistant à transporter, à moindre coût, des marchandises depuis les points de disponibilité x_i ; $i = 1, \ldots, 4$; aux points de demande y_j ; $j = 1, \ldots, 5$. Les quantités disponibles en x_i sont a_i et les quantités requises par y_j sont b_j. Le coût de transport unitaire de x_i vers y_j est c_{ij}. Les données a_i, b_j et c_{ij} sont récapitulées dans le tableau ci-après.

45	60	45	30	45	$a_1 = 250$
35	15	35	35	25	$a_2 = 300$
30	25	45	55	15	$a_3 = 100$
30	40	55	10	10	$a_4 = 300$
$b_1 = 200$	$b_2 = 150$	$b_3 = 300$	$b_4 = 100$	$b_5 = 200$	

1) *Formuler ce problème au terme d'un programme de transport.*
2) *Donner une base réalisable initiale par la méthode de plus faible coût.*
3) *Donner une base réalisable initiale par la méthode de Russel.*
4) *Donner le plan d'acheminement optimal.*
5) *En changeant $a_4 = 300$ par $a_4 = 450$, donner le nouveau plan de transport optimal.*

Exercice 7.6.2

Résoudre le problème d'affectation dont la matrice des coûts est :

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 9 & 4 \\ 3 & 8 & 3 & 9 \\ 2 & 7 & 6 & 5 \\ 5 & 9 & 8 & 3 \end{pmatrix}.$$

Exercice 7.6.3

Un atelier de fabrication de chaussures doit satisfaire, durant 4 périodes consécutives, aux demandes D_j, $j = 1, \ldots, 4$. Il peut produire, de

manière habituelle, une quantité m_i de paires de chaussures durant la période i, au coût unitaire p_i. Il peut produire, en supplément, une quantité s_i durant cette même période i au coût unitaire $q_i > p_i$. Enfin, le stockage est possible avec un coût de stockage par article et par période égal à k. Bien évidemment, les articles fabriqués durant une période i peuvent être utilisés pour satisfaire les demandes D_j, $j \geq i$.

Pour $i, j \in \{1, \ldots, 4\}$, on pose $x_{i,j}$ (*resp.* $x_{i+4,j}$) le nombre d'articles produits de manière habituelle (*resp.* en supplément) à la période i et utilisés à la période j.

1) *Montrer que les contraintes du problème se traduisent par :*

(1) $\sum_{i=1}^{4}(x_{i,j} + x_{i+4,j}) = D_j$, pour $j = 1, \ldots, 4$

(2) $\sum_{j=1}^{4} x_{i,j} \leq m_i$, pour $i = 1, \ldots, 4$

(3) $\sum_{j=1}^{4} x_{i+4,j} \leq s_i$, pour $i = 1, \ldots, 4$

(4) $x_{i,j} \geq 0$ et $x_{i+4,j} \geq 0$, pour $1 \leq i \leq j \leq 4$

(5) $x_{i,j} = 0$ et $x_{i+4,j} = 0$, pour $1 \leq j < i \leq 4$

2) *Montrer que pour $1 \leq i \leq j \leq 4$, les coûts unitaires sont définis par*

$$c_{i,j} = p_i + k(j - i) \text{ et } c_{i+4,j} = q_i + k(j - i).$$

3) *Comment définir les coûts unitaires $c_{i,j}$ pour $1 \leq j < i \leq 4$ afin d'éliminer la contrainte (5) établie dans la première question. Indication : Utiliser la convention $0 \times (+\infty) = 0$.*

4) *Formuler le problème qui consiste à établir un plan de fabrication et de stockage minimisant le coût total sur les 4 périodes et satisfaisant les 4 demandes, en un programme linéaire $(\mathcal{P})$.*

5) *On suppose que les données (en milliers de paires de chaussures) sont :*

Période i	1	2	3	4
D_i	12	9	18	22
m_i	10	8	10	12
s_i	8	6	5	4

$p_i = 10$, $q_i = 15, \forall 1 \leq i \leq 4$ et $k = 1$

a - *Avec ces données, modifier $(\mathcal{P})$ afin qu'il devienne un problème de transport. Indication : La production est-elle adaptée à la demande ?*

b - *Appliquer la méthode de plus faible coût pour trouver une solution de base réalisable initiale.*

c - *Montrer que cette solution est optimale pour* $(\mathcal{P})$.

d - *Traduire la solution de* $(\mathcal{P})$ *pour donner le plan de fabrication et de stockage optimal.*

Exercice 7.6.4

Un enseignant universitaire a partitionné ses étudiants en 5 groupes de travail ; $G_1, \ldots, G_5$ *; pour que chacun choisisse un sujet d'activité parmi les 5 sujets* $S_1, \ldots, S_5$*, qu'il a lui même proposés. Chaque sujet doit être affecté à un et un seul groupe de travail. Puisque deux groupes peuvent choisir le même sujet, il a pensé à demander, pour chaque groupe, de classer les 5 sujets par ordre de préférence décroissant. Le résultat récolté est présenté dans le tableau ci-après.*

4	1	3	5	2	G_1
1	3	5	2	4	G_2
1	2	3	5	4	G_3
3	2	1	4	5	G_4
2	1	3	5	4	G_5
S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	

Soucieux de l'égalité des chances entre les différents groupes, l'enseignant a essayé, en vain, de trouver la répartition la plus équitable. Il a fait donc appel à son collègue mathématicien qui lui a proposé de modéliser le problème en un programme d'affectation.

1) *Formuler ce problème et donner le tableau d'affectation correspondant.*

2) *Donner la répartition la plus équitable au consciencieux enseignant.*

3) *Déterminer le nombre de groupes qui ont obtenu leur premier choix.*

4) *Cette répartition est-elle unique ? Justifier votre réponse.*

Exercice 7.6.5

1) *Par le biais de l'algorithme du simplexe, montrer que l'optimum de tout problème de transport est fini, ceci quelque soit le signe des coûts unitaires de transport.*

2) *Montrer que, pour tout problème de transport, le coût de transport est borné sur son domaine réalisable.*

Bibliographie

[1] Beale E. M. L., Cycling in the dual simplex algorithm. *Naval Research Logistics Quarterly* **2** (1955) 269–275.

[2] Bland R. G., New finite pivoting methods for the simplex method. *Mathematics of Operations Research* **2** (1977) 103–107.

[3] Bradley S. P., Hax A. C. et Magnanti T. L., *Applied mathematical programming*, Addison-Wesley Publishing Company (1977).

[4] Chvátal V., *Linear programming*, W. H. Freeman and Company, New York (1983).

[5] Dantzig G. B., Maximization of a linear function of variables subject to linear inequalities. *In : T. C. Koopmans (ed.) Activity Analysis of Production and Allocation.* John Wiley (1951) 339–347.

[6] Dantzig G. B., Upper bounds, secondary constraints, and block triangularity in linear programming. *Econometrica* **23** (1955) 174–183.

[7] Dantzig G. B., *Linear programming and extensions*, Princeton University Press (1963).

[8] Dantzig G. B. et Thapa M. N., *Linear programming 1 : Introduction*, Springer-Verlag, New York (1997).

[9] Dantzig G. B. et Thapa M. N., *Linear programming 2 : Theory and Extensions*, Springer-Verlag, New York (2003).

[10] Droesbeke F., Hallin M. et Lefevre C., *Programmation linéaire par l'exemple*, Ellipses, Paris (1986).

[11] Faure R., Lemaire B. et Picouleau C., *Précis de recherche opérationnelle*, Dunod, 5^e édition, Paris (2000).

[12] Foulds L. R., *Optimization Techniques : An introduction*, Springer-Verlag, New York (1981).

[13] Gass S. I., *Linear programming, Methods and Applications*, McGraw-Hill (1969).

[14] Guéret C., Prins C. et Sevaux M., *Programmation linéaire*, Eyrolles, France (2000).

[15] Hadley G., *Linear programming*, Addison-Wesley (1962).

[16] Helary J. M. et Pedrono P., *Recherche opérationnelle, exercices corrigés*, Hermann, Paris (1983).

[17] Hildebrand F. B., *Introduction to numerical analysis*, Dover Publications Inc., New York (1987).

[18] Hillier F. S. et Lieberman G. J., *Introduction to operations research*, Holden-Day Inc., San Francisco, California (1980).

[19] Hitchcock F. L., The distribution of a produce from several sources to numerous localities. *Journal of Mathematical Physics* **20** (1941) 224–230.

[20] Klee V. et Minty G. J., How good is the simplex method ? *In : Inequalities III (O. Shisha, ed.)*, Academic Press (1972) 159–175.

[21] Lemke C. E., The dual method of solving the linear programming problem. *Naval Research Logistics Quarterly* **1** (1954) 36–47.

[22] Mathlouthi S., *Analyse numérique linéaire et non linéaire*, Centre de Publication Universitaire de Tunisie, collection M/Sciences fondamentales, Tunis (2002).

[23] Nobert Y., Ouellet R. et Parent R., *Problèmes résolus de recherche opérationnelle*, Gaëten Morin Éditeur, 3^e édition, Canada (1999).

[24] Nobert Y., Ouellet R. et Parent R., *La recherche opérationnelle*, Gaëten Morin Éditeur, 3^e édition, Canada (2001).

[25] Reinfeld N. N. et Vogel W. R., *Mathematical Programming*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs (1958).

[26] Roberts A. W. et Varberg D. E., *Convex Functions*, Academic Press (1973).

[27] Russel E. J., Extensions of Dantzig's algorithm for finding an initial near-optimal basis for the transportation problem. *Operations Research* **17** (1969) 309–333.

[28] Schatzman M., *Analyse numérique*, Masson/InterEditions, Paris (1991).

[29] Stoer J. et Witzgall C., *Convexity and optimization in Finite Dimension I*, Springer-Verlag, Berlin (1970).

[30] Stoer J. et Bulirsch R., *Introduction to numerical analysis*, 2nd edition, Sringer-Verlag, New York (1996).

Cet ouvrage de recherche opérationnelle est consacré essentiellement à l'algorithme du simplexe et ses applications. La présentation est axée sur une approche à la fois mathématique et algorithmique, illustrée par 33 exemples corrigés. Tous les résultats mathématiques sont rigoureusement démontrés. Une grande importance est accordée à l'interprétation des outils mathématiques développés. Des exemples issus de la vie économique sont également présentés et résolus en vue d'une initiation à la modélisation mathématique.

Cet ouvrage s'adresse à un public très large, il intéresse autant les mathématiciens que les ingénieurs, informaticiens, gestionnaires et économistes ; le seul pré-requis exigé pour la compréhension étant les éléments de base d'Algèbre matricielle. Deux nouvelles méthodes sont proposées, la première concerne la recherche d'une base réalisable pour l'algorithme du simplexe, et la deuxième les problèmes de transport.

Hédi Nabli est maître de conférences en mathématiques appliquées à l'Institut Supérieur d'Informatique et de Mathématiques de Monastir. Il est aussi membre du Laboratoire Cristal de l'Ecole Nationale des Sciences de l'Informatique de Tunis. Ses travaux de recherche portent sur les modèles markoviens et leurs applications aux réseaux informatiques et de télécommunication. Récemment, il s'est intéressé particulièrement à l'algorithme du simplexe et l'algorithme de transport. Les modules enseignés couvrent, entre autres, le calcul des probabilités et ses applications, la recherche opérationnelle, l'analyse numérique, l'Algèbre linéaire et la statistique descriptive.

9 789973 373519

© Centre de Publication Universitaire, 2006.

ISBN : 978-9973-37-351-9 Prix : 15 dinars